



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

استفاده از فیلترهای وفقی برای متعادل سازی کانال، جهت  
مقابله با اعوجاج غیرخطی و تداخل میان سمبلی در کانال های  
دارای محوشدگی ناشی از چند مسیرگی

## Channel Equalization Method, Using Adaptive Filters, Combating Non-Linear Distortion and Intersymbol Interference for Multipath Fading Channels

دانشجو: محمدفؤاد آنقی  
شماره دانشجویی: ۸۷۲۲۳۵۲۲

استاد راهنما: دکتر حمیدرضا امین داور  
استاد داور دفاعیه: دکتر سید مصطفی صفوی همامی

پائیز ۱۳۹۰

## چکیده

یکی از ابتدایی ترین چالش هایی که پیش روی یک طراح سیستم های مخابراتی است، مواجهه با کانال ها و سیگنال هایی است که هیچ گونه اطلاعاتی از آن ها در دست نیست. به ناچار طراح می-بایست روشی برای تخمین کانال بیابد و اهمیت شناسایی سیستم ها در این مواقع به خوبی نمایان می-شود. به علاوه تاثیر عواملی همچون نویز<sup>۱</sup> و اعوجاج غیر خطی<sup>۲</sup> بر روی سیگنال ها در کانال هایی که از محوشدگی<sup>۳</sup> سیگنال به علت پدیده چند مسیرگی<sup>۴</sup> رنج می برند، بازیابی سیگنال ارسالی در گیرنده را مشکل تر می سازد.

متعادل سازی<sup>۵</sup>، یکی از مهم ترین راه حل ها برای مبارزه با اثر اعوجاج و تداخل میان سمبلی<sup>۶</sup>، بالاخص در مخابرات بدون سیم که در آن امکان انتشار امواج از هر جسم فلزی به علت فرکانس بالای سیگنال وجود دارد، شناخته شده و به کار گرفته می شود. از طرفی وجود کانال هایی که پاسخ فرکانسی آن ها ذاتاً غیرخطی بوده و بعضاً پارامترهای کانال با گذشت زمان تغییر می کنند، لزوم تطبیقی<sup>۷</sup> بودن روش های متعادل سازی را یادآور می شود. از آن جایی که سیگنال دریافتی بر روی یک کانال غیرخطی تابعی از مقادیر گذشته سیگنال ارسالی بوده و هم چنین اعوجاج غیرخطی، خود نسبت به زمان متغیر و از یک مکان تا مکان دیگر متفاوت است، متعادل ساز علاوه بر وفقی بودن باید غیرخطی نیز باشد.

روش ارائه شده در این گزارش جهت مقابله با عوامل مخرب سیگنال و بازیابی سیگنال اولیه از طریق متعادل سازی استفاده از نوعی فیلتر وفقی به نام هم رشتاین فیلتر<sup>۸</sup> می باشد این فیلتر از دو بلوک که به صورت سری با یکدیگر قرار گرفته اند تشکیل شده است که یکی از آن ها دارای یک تابع تبدیل غیرخطی استاتیک و دیگری متشکل از یک تابع دینامیک خطی می باشد. قرار گرفتن سری این دو بلوک با کانال مخابراتی مجموعاً از طریق تخمین پارامترهای کانال و به روزرسانی ضرایب فیلتر، می تواند منجر به دریافت سیگنال ورودی با تقریب بسیار خوبی (از نقطه نظر منظومه سیگنال<sup>۹</sup>) در

---

<sup>1</sup> Noise

<sup>2</sup> Nonlinear Distortion

<sup>3</sup> Fading

<sup>4</sup> Multipath

<sup>5</sup> Equalization

<sup>6</sup> Intersymbol Interference (ISI)

<sup>7</sup> Adaptive

<sup>8</sup> Hammerstein Filter

<sup>9</sup> Signal Constellation

خروجی متعادل‌ساز بشود که از تعداد خطای به مراتب کمتری نسبت به سیگنال دریافتی اولیه برخوردار باشد.

## فهرست

### بخش اول: مقدمات

- ۱-۱ المان های یک سیستم مخابراتی
- ۲-۱ کانال های مخابراتی و مشخصات آن ها
- ۱-۲-۱ کانال های متشکل از سیم مسی
- ۲-۲-۱ کانال های فیبر نوری
- ۳-۲-۱ کانال های الکترو مغناطیسی بدون سیم
- ۴-۲-۱ کانال های آکوستیک زیر آب
- ۳-۱ متعادل سازی (همسان سازی)
- ۱-۳-۱ افزایش نویز توسط متعادل ساز
- ۲-۳-۱ انواع متعادل سازها
- ۳-۳-۱ طیف دو لایه و انتقال بدون ISI
- ۴-۳-۱ متعادل سازهای خطی
- الف- متعادل سازهای ZF (صفر اجباری)
- ب- متعادل ساز MMSE
- ۵-۳-۱ تخمین رشته اطلاعات با بیشترین شباهت (MLSE)
- ۶-۳-۱ متعادل سازی فیدبک تصمیم

### بخش دوم : متعادل سازی تطبیقی

- ۱-۲ متعادل سازی خطی تطبیقی
- ۱-۱-۲ الگوریتم ZF
- ۲-۱-۲ الگوریتم LMS
- ۲-۲ همسان ساز پسخور تصمیم وفقی
- ۳-۲ الگوریتم های کمترین مربعات بازگشتی (RLS) برای همسان ساز وفقی
- ۱-۳-۲ الگوریتم کمترین مربعات بازگشتی (کالمن)
- ۴-۲ همسان سازی خود بازیاب (کور)
- ۱-۴-۲ همسان سازی کور مبتنی بر معیار حد اکثر تشابه
- ۲-۴-۲ الگوریتم های گرادیان آماری

۳-۴-۲ الگوریتم های همسان سازی کور مبتنی بر آمارگان مرتبه دوم و بالاتر سیگنال

بخش سوم : هم‌رشتاین فیلترینگ

۱-۳ معرفی سیستم هم‌رشتاین

۲-۳ الگوریتم تطبیقی برای مدل هم‌رشتاین

۳-۳ متعامد سازی ورودی به زیر سیستم چند جمله ای

۴-۳ انتخاب اندازه حرکت (قدم)

۵-۳ پیچیدگی محاسباتی

۶-۳ پایداری فیلتر هم‌رشتاین تطبیقی

بخش چهارم : نتایج شبیه سازی

ضمیمه ۱ : نتایج پیاده سازی الگوریتم توسط برنامه MATLAB

ضمیمه ۲: نتایج پیاده سازی الگوریتم LMS

منابع

# بخش اول: مقدمات

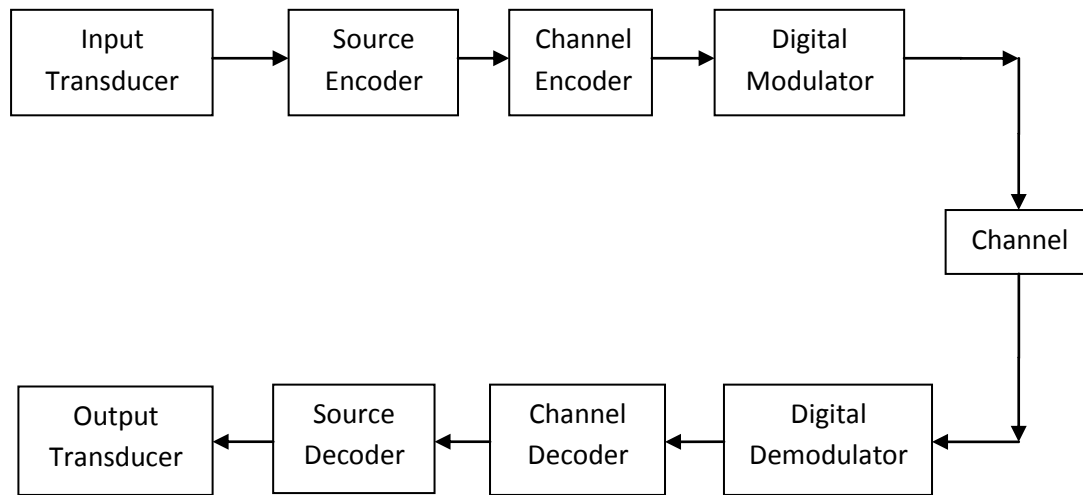
## ۱-۱ المان های یک سیستم مخابراتی

یکی از مهم ترین عواملی که تجزیه تحلیل و طراحی یک سیستم مخابراتی همواره به آن وابسته است، مشخصات کانال های فیزیکی است که اطلاعات بر روی آن ها ارسال می شوند. مشخصات کانال همواره بر روی نوع و تعداد بلوک هایی که یک سیستم مخابراتی را می سازند تاثیر مستقیم دارد، می توان گفت همواره آثاری که کانال مخابراتی بر روی سیگنال ارسالی دارد، در جهت تخریب سیگنال بوده و وظیفه طراح اصلاح این آثار مخرب و بازیابی سیگنال اصلی می باشد. آنچه مورد نظر این پایان نامه است، اساساً مبارزه با این آثار و ارائه راه حلی جهت بهبود دریافت، در گیرنده می-باشد.

ابتدا به طور خلاصه به معرفی یک سیستم مخابراتی به صورت شماتیک پرداخته و به توضیح مختصری در این زمینه بسنده می کنیم؛ چرا که برداشت ما از سیستم مخابراتی به برداشت بهتری از مشکل پیش رو کمک خواهد کرد. شکل ۱-۱ بلوک دیاگرام اصلی ترین عناصر یک فرستنده و گیرنده دیجیتال را نشان می دهد.

خروجی منبع تولید سیگنال می تواند یک سیگنال آنالوگ همانند صوت و تصویر و یا یک سیگنال دیجیتال همانند دیتای خروجی از یک کامپیوتر باشد که در زمان گسسته و حاوی تعداد محدودی

کاراکتر خروجی است. در مخابرات دیجیتال خروجی منبع هرچه که باشد ابتدا به صورت یک رشته باینری از اعداد تبدیل می شود. ما همواره به دنبال این هستیم که این خروجی را با کمترین تعداد بیتی



شکل ۱-۱ المان های یک سیستم مخابراتی

که ایجاد خطا نکند تولید کنیم. فرآیند تبدیل داده ورودی به رشته ای از اعداد باینری که توسط کارآمد ترین روش صورت گرفته باشد کدینگ منبع<sup>۱</sup> یا فشرده سازی داده نامیده می شود.

بیت های خروجی از کد کننده منبع که اکنون ما آن ها را رشته اطلاعات<sup>۲</sup> می نامیم وارد کد کننده کانال<sup>۳</sup> می شوند. هدف کد کننده کانال افزایش تعدادی بیت به رشته بیت اصلی است به طوری که با استفاده از این بیت ها در گیرنده بتوان بر آثاری هم چون نویز و تداخل موجود در کانال غلبه کرد و داده اصلی را دریافت نمود. می توان گفت استفاده از این بلوک جهت اطمینان دریافت اطلاعات به شکل صحیح تر درگیرنده بوده و تشخیص و تصحیح خطا<sup>۴</sup> را میسر می نماید.

اکنون زمان آن رسیده که دنباله کد شده داده وارد بلوک مدولاتور دیجیتال<sup>۵</sup> شود که در واقع واسطه<sup>۶</sup> ورود سیگنال به کانال می باشد. از آن جایی که تمام کانال های شناخته شده در طبیعت تنها قادر به انتقال سیگنال های الکتریکی (شکل موج) هستند طبیعی است اولین هدف این بلوک تبدیل دیتای دیجیتال به امواج قابل ارسال می باشد. در درجه دوم سیگنال هایی که در فرکانس پایین ارسال می-

<sup>1</sup> Source coding

<sup>2</sup> Information sequence

<sup>3</sup> Channel Coder

<sup>4</sup> Error Detection and Correction (CRC)

<sup>5</sup> Digital Modulator

<sup>6</sup> Interface

شوند همچون سیگنال صوتی دارای طول موجهای بلند خواهند بود. از آن جا که طول آرایه های آنتن با طول موج<sup>۱</sup> سیگنال نسبت مستقیم دارد در این مواقع ساخت آنتن با ابعاد بسیار بزرگ برای چنین سیگنال هایی غیرممکن خواهد بود که این موضوع خود لزوم استفاده از مدولاتور را مؤکد می نماید. این مدولاسیون می تواند به صورت باینری و یا آرایه های چند بیتی در اشکال مختلف صورت گیرد.

کانال در واقع فضای ما بین فرستنده و گیرنده است و سیگنال با گذر از آن امکان دریافت سیگنال در فواصل بسیار دورتر را به ما می دهد. گذشته از نوع کانال (کانال بدون سیم همچون فضای آزاد (اتمسفر)، کانال تلفن همچون زوج سیم، فیبر نوری، ارتباط رادیویی) همواره سیگنال با گذر از زمان طی یک فرآیند اتفاقی آلوده می شود. این آلودگی می تواند ساز و کار های مختلفی از جمله نویز حرارتی تجمیعی، تولید شده توسط دستگاه های الکترونیکی، نویز تولیدی از منابع انسانی همچون اتومبیل و ماشین آلات، و یا نویز جوی همچون امواج ساطع شده از رعد و برق داشته باشد. بلوک-هایی که در گیرنده مشخص شده اند وظیفه ای معکوس با آن چه در فرستنده گفته شده بر عهده دارند تا در نهایت با غلبه بر این نوع آلودگی ها سیگنال ارسال شده را با درصد خطای حداقل به کاربر تحویل دهند.

همانطور که گفته شد بحث اساسی در این نوشته مقابله با آثار تخریب کننده سیگنال موجود در کانال می باشد. برای نیل به این هدف ابتدا باید اطلاعاتی در مورد انواع کانال های مخابراتی، مشخصه های هر یک و آثاری که بر روی هر یک می گذارند داشته باشیم. در بخش بعد به توضیح این مسئله خواهیم پرداخت.

## ۱-۲ کانال های مخابراتی و مشخصات آن ها

همان طور که گفته شد کانال های مخابراتی رابط بین فرستنده و گیرنده می باشند، این رابط می-تواند متشکل از یک زوج سیم که سیگنال الکتریکی را منتقل می کند، فیبر نوری که در آن اطلاعات توسط یک پرتو نور مدوله شده انتقال داده می شود، و یا محیط زیر آب باشد که در آن امواج آکوستیک برای انتقال داده بهره گرفته می شود.

عموماً یک مشکل عمده در انتقال سیگنال، نویز تجمیعی است. منبع نویز می تواند قطعاتی همچون مقاومت ها و یا قطعات حالت جامد<sup>۲</sup> که از آن ها در طراحی سیستم مخابراتی استفاده می شود

---

<sup>1</sup> Wave Length

<sup>2</sup> Solid State



باشد. گاهی از این نویز به نویز حرارتی<sup>۱</sup> تعبیر می شود. منابع دیگر نویز و تداخل می تواند به صورت خارجی همچون تداخل ایجاد شده توسط دیگر کاربرهای کانال بر روی سیگنال ایجاد شود. از دیگر عوامل مخرب موجود در مورد یک سیگنال می توان به تضعیف سیگنال، اعوجاج فاز و دامنه و اعوجاج چند مسیرگی اشاره کرد.

یکی از راه های کاهش اثر نویز، افزایش توان سیگنال ارسالی است. اما در این مورد محدودیت-هایی از قبیل اجزا به کار رفته در سیستم و دیگر مسایل عملی وجود دارند. عامل محدود کننده دیگر پهنای باند موجود کانال است.

### ۱-۲-۱ کانال های متشکل از سیم مسی

شبکه تلفن به صورت گسترده ای از خطوط سیمی برای انتقال سیگنال صوتی و همچنین دیتا و ویدئو استفاده می کند. در واقع زوج سیم تابیده<sup>۲</sup> و کابل کوکسیال<sup>۳</sup> اولین کانال های الکترو مغناطیسی محافظت شده<sup>۴</sup> بودند که پهنای باندی در حد قابل قبول ارائه می کردند. به طور کلی خطوط تلفن که کاربر را به مرکز مخابراتی متصل می کنند دارای پهنای باند چند صد کیلوهرتز هستند. این در حالی است که این مقدار روی کابل کوکسیال تا چند مگاهرتز می رسد.

سیگنال های ارسالی بر روی این نوع کانال همزمان از اعوجاج دامنه، اعوجاج فاز و نویز جمعیتی رنج می برند. هم چنین تداخل از کانال های همسایه<sup>۵</sup> بر روی این کانال ها بسیار رخ می دهد.

### ۱-۲-۲ کانال های فیبر نوری

در دوهه اخیر استفاده از فیبر نوری و تجهیزات آن رواج بسیاری یافته است پهنای باند این کانال ها به صورت خیره کننده ای بالا بوده و اصلا با کابل های کوکسیال قابل قیاس نیستند. این کانال ها از تضعیف سیگنال بسیار کمی برخوردار هستند، چرا که در انتقال سیگنال از پرتوهای نور (LED و یا لیزر) با شدت های مختلف برای انتقال داده استفاده می شود. از منابع نویز در کانال های فیبر نوری می توان به دیود های نوری و تقویت کننده های الکترونیکی اشاره کرد.

---

<sup>1</sup> Thermal noise

<sup>2</sup> Twisted pair wire line

<sup>3</sup> Coaxial cable

<sup>4</sup> Guided

<sup>5</sup> Cross Talk Interference

## ۱-۲-۳ کانال های الکترومغناطیسی بدون سیم

در این روش برای ارسال سیگنال از تشعشعات ناشی از یک آنتن استفاده می شود که نوع و شکل آن بسته به فرکانس ارسال تغییر می کند. سه نوع اصلی انتقال در این روش وجود دارد: انتقال در خط دید (LOS)<sup>۱</sup>، انتشار موج زمینی<sup>۲</sup> و انتشار امواج آسمانی<sup>۳</sup>. از عوامل مخرب سیگنال در این نوع انتشار می توان به صاعقه ایجاد شده توسط شرایط جوی اشاره کرد. همچنین نویز ایجاد شده توسط بشر و نویز حرارتی در تجهیزات از دیگر این عوامل می باشند.

یکی دیگر از مشکلاتی که مرتباً در این نوع از مخابرات در فرکانس های بالا (HF) رخ می دهد پدیده چند مسیری است. علت وقوع آن رسیدن سیگنال به گیرنده از مسیرهای مختلف با تاخیر های مختلف است که منجر به پدیده هایی همچون تداخل میان سمبلی می شود. محو شدگی از دیگر آثار این پدیده است که تقریباً هر شخصی هنگام گوش دادن به رادیو های شبانه یا صحبت کردن با تلفن همراه آن را تجربه کرده است.

از دیگر معضلات مرتبط با این نوع کانال ها می توان به مشکلات مربوط به انتشار همچون پراکندگی<sup>۴</sup>، دور زدن موج به دور موانع (تفرق)<sup>۵</sup>، انعکاس<sup>۶</sup>، خم شدن موج در شرایط مختلف جوی<sup>۷</sup> و تلفات افت مسیر بسیار بالا اشاره کرد.

## ۱-۲-۴ کانال های آکوستیک زیر آب

در چند دهه گذشته فعالیت های جستجو در اقیانوس ها شروع شده و رو به افزایش بوده اند و همچنین ارسال دیتا از سنسورهای تعبیه شده در سطح اقیانوس به سطح خارج اقیانوس نیاز به مطالعه مخابرات زیر آب را افزایش بخشیده است.

امواج الکترومغناطیسی توانایی عبور در مسافت های طولانی زیر آب را ندارند مگر این که از فرکانس های بسیار پایین استفاده کنیم. اما حجم و اندازه بزرگ و توان بسیار بالای فرستنده مورد نیاز این نوع امواج هزینه این کار را بسیار بالا برده و آن را عملاً غیر ممکن می سازد. برای تضعیف

---

<sup>1</sup> Line of Sight

<sup>2</sup> Ground Waves

<sup>3</sup> Sky Waves

<sup>4</sup> Scattering

<sup>5</sup> Diffraction

<sup>6</sup> Reflection

<sup>7</sup> Refraction

امواج الکترو مغناطیس در زیر آب از اصطلاح عمق پوستی<sup>۱</sup> استفاده می شود که تضعیف سیگنال را به نسبت  $1/e$  نشان می دهد. برای آب دریا عمق پوستی به شکل  $\delta = 250/\sqrt{f}$  بیان می شود که در آن  $f$  بر حسب فرکانس و  $\delta$  بر حسب متر است [8].

کانال های زیر آب به عنوان یکی از کانال های دارای محو شدگی ناشی از پدیده چند مسیریگی شناخته می شوند چرا که در آن ها سیگنال از سطح آب و همچنین از کف دریا منعکس می شود. به خاطر حالت موج بودن آب این انعکاس ها همواره با زمان تغییر می کنند و منجر به پدیده محو شدگی می شوند. به علاوه، تضعیف وابسته به فرکانس نیز در این کانال ها موجود است که تقریباً مقدار آن با مربع فرکانس برابر است.

نویز آکوستیک محیطی اقیانوس<sup>۲</sup> که توسط جاندارانی که در سطح اقیانوس زندگی می کنند ایجاد می شود، یکی از عوامل نویز برای کانال های زیر آب محسوب می شوند. هم چنین در نزدیکی بنادر، نویز آکوستیک ایجاد شده توسط بشر نیز به این معضلات دامن بیشتری می زند. اما در عین حال با طراحی مناسب می توان ارسال سیگنال آکوستیک در زیر دریا را برای مسافت های طولانی انجام داد.

اکنون که با انواع کانال های مخابراتی و خطراتی که سیگنال ارسالی را در راه رسیدن به گیرنده تهدید می کنند آشنا شدیم وقت آن رسیده که در پی یافتن راه حل هایی برای حل این مشکل باشیم. یکی از مهمترین روش هایی که برای احیای سیگنال در گیرنده صورت می گیرد متعادل سازی است که موضوع اصلی این گزارش را تشکیل می دهد. در ادامه و همچنین در فصول بعد به تفصیل به توضیح این مقوله می پردازیم.

## ۳-۱ متعادل سازی (همسان سازی)

تا کنون دیدیم، که گسترده گی تاخیر<sup>۳</sup> در سیگنال (سیگنال های دریافت شده از مسیر های مختلف مربوط به یک نمونه ارسالی) باعث به وجود آمدن تداخل میان سمبلی می شود. زمانی که نرخ نمونه برداری از سیگنال (بازه هر نمونه مدولاسیون) با میزان گسترش تاخیر کانال تقریباً برابر باشد ISI می تواند سطح خطای غیرقابل جبرانی به سیگنال ما اضافه کند. پردازش سیگنال ساختار بسیار قدرتمندی برای مقابله با ISI در نظر گرفته است. در یک مفهوم کلی، متعادل سازی به کلیه فعالیت هایی

<sup>1</sup> Skin Depth

<sup>2</sup> Ambient Ocean Acoustic Noise

<sup>3</sup> Delay Spread

که در گیرنده جهت مقابله با تداخل میان سمبلی ناشی از گسترش تاخیر کانال صورت می گیرد، اتلاق می شود. همچنین روش هایی از پردازش سیگنال در فرستنده وجود دارند که سیگنال را نسبت به ISI کانال مقاوم تر و حساسیت آن را کمتر می کنند. به عنوان نمونه ای از این روش ها می توان به طیف گسترده<sup>۱</sup> و مدولاسیون چند حاملی<sup>۲</sup> اشاره کرد. معمولاً کاربردهایی که در آنها نرخ ارسال داده بیشتر باشد، نسبت به گسترش تاخیر حساس تر بوده و عموماً نیاز به متعادل سازهای با کارایی بالا<sup>۳</sup> و یا دیگر تکنیک ها برای مقابله با ISI دارند. در واقع مبارزه با این مقوله از اساسی ترین چالش ها در مخابرات بدون سیم سرعت بالا است.

اساساً طراحی متعادل ساز باید به گونه ای باشد که با کاهش اثر ISI موجب افزایش اثر نویز نشود چرا که نویز و سیگنال هر دو از متعادل ساز عبور می کنند که این کار باعث افزایش توان نویز می شود. متعادل سازهای غیرخطی کمتر از انواع خطی باعث افزایش اثر نویز می شوند اما همان طور که بعداً گفته خواهد شد طراحی آن ها از پیچیدگی بالاتری برخوردار خواهد بود. به علاوه متعادل سازها عموماً از تخمینی از پاسخ ضربه یا پاسخ فرکانسی کانال برای مقابله با ISI استفاده می کنند. از آن جا که کانال بدون سیم با زمان تغییر می کند متعادل ساز ابتدا تخمینی از پاسخ ضربه یا پاسخ فرکانسی کانال به دست می آورد (آموزش<sup>۴</sup>). سپس تخمین خود از پاسخ فرکانسی را با تغییر کانال به روز می کند (دنباله روی<sup>۵</sup>). از فرآیند آموزش و دنباله روی متعادل سازها، معمولاً به متعادل سازی تطبیقی (وفقی) یاد می شود که در مورد کانال هایی که تغییرات سریع دارند بسیار دشوار است. در ادامه فصل به ملاحظات مختلف مربوط به طراحی متعادل سازها از جمله برقراری تعادل بین کاهش ISI و جلوگیری از افزایش نویز، مشخصات و طراحی متعادل سازهای خطی و غیر خطی و فرآیند آموزش و دنباله روی خواهیم پرداخت.

طراحی متعادل ساز می تواند در سه قسمت باند پایه<sup>۶</sup>، RF<sup>۷</sup> و یا IF<sup>۸</sup> صورت پذیرد. اکثر متعادل سازها به صورت دیجیتال و بعد از بلوک A/D طراحی می شوند چرا که این فیلترها علاوه بر اندازه کوچک و قیمت ارزان به سادگی قابل تنظیم بوده و از نظر مصرف توان بسیار به صرفه هستند.

<sup>1</sup> Spread Spectrum

<sup>2</sup> Multicarrier Modulation

<sup>3</sup> High Performance

<sup>4</sup> Training

<sup>5</sup> Tracking

<sup>6</sup> Baseband

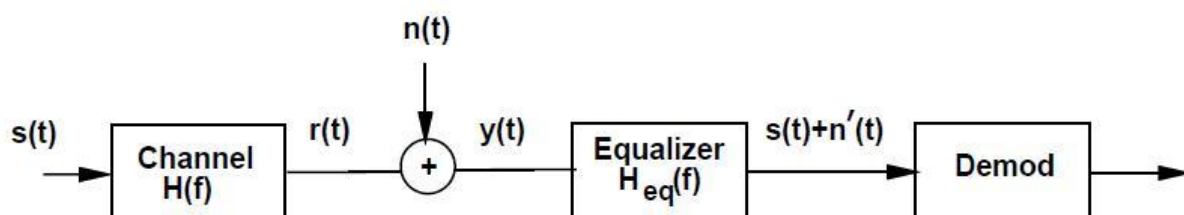
<sup>7</sup> Radio Frequency

<sup>8</sup> Intermediate Frequency

برای سادگی بیشتر قسمت مربوط به افزایش نویز را در فاز آنالوگ و بقیه قسمت های طراحی را در فاز دیجیتال بررسی خواهیم کرد.

### ۱-۳-۱ افزایش نویز توسط متعادل ساز

شکل ۱-۲ یک سیستم گیرنده با متعادل سازی آنالوگ را نشان می دهد که اثر افزایش نویز را به همراه ندارد. سیگنال  $S(t)$  را که از کانال با پاسخ فرکانسی  $H(f)$  عبور می کند در نظر بگیرید.



شکل ۱-۲ گیرنده به همراه متعادل ساز

در ورودی گیرنده نویز سفید گاوسی<sup>۱</sup> به سیگنال اصلی اضافه می شود. بنابراین سیگنال ورودی به گیرنده برابر است با  $Y(f) = S(f)H(f) + N(f)$ . این در حالی است که  $N(f)$  دارای چگالی طیف توان<sup>۲</sup>  $N_0$  می باشد. اگر پهنای باند  $s(t)$  برابر با  $B$  باشد توان نویز درون پهنای باند سیگنال برابر با  $N_0B$  خواهد بود. فرض کنید می خواهیم سیگنال را به نحوی متعادل سازی کنیم که اثر ISI به طور کلی از آن حذف گردد. این مهم به سادگی با معرفی متعادل ساز آنالوگ زیر در ورودی گیرنده محقق می گردد.

$$H_{eq}(f) = 1/H(f) \quad (1-1)$$

سیگنال گیرنده پس از عبور از بلوک متعادل ساز به صورت  $[S(f)H(f)+N(f)]H_{eq}(f)=S(f)+N'$  خواهد آمد که در آن  $N'(f)$  نویز رنگی گاوسی با چگالی طیف توان  $N_0/|H(f)|^2$  می باشد. بنابراین کل ISI از سیگنال جدا شده است  $(S(f))$ .

حال فرض کنید  $H(f)$  در قسمت هایی از باند فرکانسی سیگنال  $s(t)$  دارای گسستگی طیفی<sup>۳</sup> باشد  $(H(f_0) = 0, f_0)$ . در این حالت توان نویز  $N'(f)$  بی نهایت می شود. حتی اگر گسستگی طیفی هم نباشد، اگر  $H(f)$  در نقاطی سیگنال را به شدت تضعیف نماید،  $H_{eq}(f)$  توان نویز را شدیداً تقویت

<sup>1</sup> White Gaussian Noise

<sup>2</sup> Power Spectral Density

<sup>3</sup> Spectral Null

میکند. در این وضعیت حتی اگر ISI به طور کلی از سیگنال جدا شود باز هم متعادل‌ساز به علت کاهش شدید نسبت سیگنال به نویز عملکرد ضعیفی خواهد داشت. بنابراین هدف اصلی متعادل‌ساز برقراری هماهنگی ما بین کاهش اثر ISI و افزایش مقدار SNR می باشد. متعادل‌سازهای خطی دیجیتال بر اساس معکوس کردن پاسخ فرکانسی کانال کار کرده و بیشترین میزان افزایش نویز را دارند. در مقابل، متعادل‌سازهای غیر خطی چون از روش معکوس کردن کانال استفاده نمی کنند به میزان کمتری ایجاد چنین مشکلی می کنند.

### ۱-۳-۲ انواع متعادل‌سازها

عموماً متعادل‌سازها به دو دسته کلی تقسیم می شوند: خطی و غیر خطی. انواع خطی از نظر مفهومی قابل فهم تر بوده و از نظر پیاده سازی ساده تر هستند. اما چنانچه دیده شد این دسته دارای افزایش نویز بیشتری هستند و در کاربردهای عملی مخابرات بدون سیم کاربرد کمتری دارند. در بین روش های غیر خطی متعادل‌سازی DFE<sup>۱</sup> از این نظر که پیاده سازی ساده تر و کارایی قابل قبولی دارد، رایج تر است. اگر چه در مواقعی که نرخ SNR<sup>۲</sup> پایین است DFE ناچار از گسترش خطا بوده و کارایی پایینی از خود نشان می دهد. یکی از روش های بهینه متعادل‌سازی روش MLSE<sup>۳</sup> میباشد. ایراد این روش آن است که پیچیدگی پیاده سازی آن به صورت نمایی با طول گسترش تاخیر افزایش می یابد و بنابراین برای بسیاری از کانال ها غیر کاربردی می باشد. شکل ۱-۳ نمایش کلی از انواع متعادل‌سازهای شناخته شده و روش های به روز کردن ضرایب را نشان می دهد.

در دسته دیگر متعادل‌سازها به دو گروه سمبل به سمبل (SBS)<sup>۴</sup> و یا تخمین گر رشته اطلاعات<sup>۵</sup> (SE) تقسیم می شوند. متعادل‌سازهای ISI، SBS را از هر سمبل جدا کرده و هر سمبل را به صورت جداگانه آشکار می کنند. انواع متعادل‌سازهای خطی شکل ۱-۳ و همچنین روش DFE از این دسته هستند. در روش SE آرایه ای از سمبل ها آشکار می شوند، بنابراین اثر ISI بخشی از فرآیند تخمین است. در مورد MLSE می توان گفت، یک روش بهینه از آشکار سازی اطلاعات است ولی بسیار پیچیده می باشد.

---

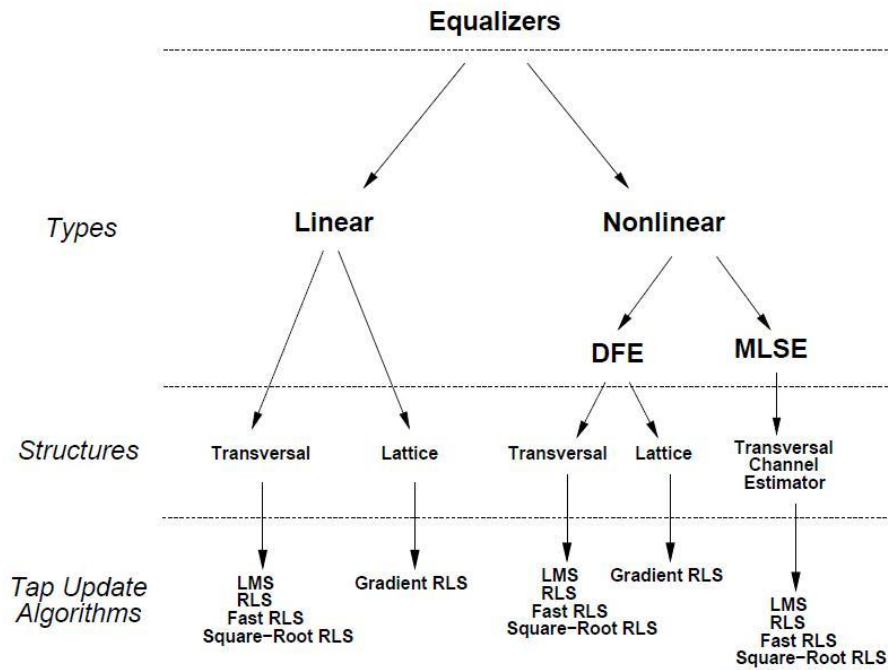
<sup>۱</sup> Decision Feedback Equalization

<sup>۲</sup> Signal to Noise Ratio

<sup>۳</sup> Maximum likelihood Sequence Estimation

<sup>۴</sup> Symbol By Symbol

<sup>۵</sup> Sequence Estimator



شکل ۱-۳ انواع متعادل‌سازها

کلیه متعادل‌سازها اساساً به دو روش متقاطع<sup>۱</sup> و شبکه‌ای<sup>۲</sup> پیاده‌سازی می‌شوند. روش متقاطع متشکل از یک فیلتر با  $N-1$  المان تاخیر و  $N$  ضریب مختلط قابل تنظیم می‌باشد. ساختار شبکه‌ای از یک مدل بازگشتی پیچیده‌تر استفاده می‌کند. در مقابل این پیچیدگی این ساختار دارای پایداری عددی بهتر و همگرایی سریع‌تر و انعطاف پذیری بهتر در برابر تغییر طول می‌باشد. علاوه بر نوع و ساختار، متعادل‌سازهای تطبیقی نیاز به روشی برای به روز کردن ضرایب فیلتر دارند. این روش‌ها نیاز دارند که هماهنگی قابل قبولی بین پیچیدگی و نرخ همگرایی و پایداری عددی برقرار کنند.

### ۱-۳-۳ طیف دو لایه<sup>۳</sup> و انتقال بدون ISI

نوعاً متعادل‌سازها به صورت دیجیتال ساخته می‌شوند. شکل ۱-۴ بلوک دیاگرام از ابتدا تا انتهای یک سیستم را نشان می‌دهد که دارای یک متعادل‌ساز دیجیتال است. سمبل ورودی  $d_k$  از یک فیلتر شکل پالس  $g(t)$  عبور کرده و سپس از طریق کانال حاوی ISI،  $c(t)$ ، ارسال می‌شود. بنابراین کانال معادل به شکل  $h(t) = g(t) * c(t)$  و سیگنال ارسالی به صورت  $d(t) * g(t) * c(t)$  خواهد بود که در آن،  $d(t) = \sum d_k \delta(t - kT_s)$  قطار سمبل‌های اطلاعات است.

<sup>1</sup> Transversal

<sup>2</sup> Lattice

<sup>3</sup> Folded Spectrum

در گیرنده نویز سفید گاوسی  $n(t)$  به آن اضافه شده که خروجی نهایی  $w(t)$  را می سازد. این سیگنال پس از عبور از یک فیلتر منطبق آنالوگ<sup>۱</sup>  $g_m^*(-t)$ ، و به دست آوردن  $y(t)$  از یک مبدل آنالوگ به دیجیتال A/D نیز عبور می کند. این واقعیت که  $g_m(t)$  نمی تواند دقیقاً با  $h(t)$  منطبق باشد، کارایی سیستم را به شدت کاهش می دهد و حساسیت به زمانبندی<sup>۲</sup> بسیار بالا می رود. برای رفع این مشکل از  $y(t)$  با چند برابر نرخ ارسال نمونه برداری می کنیم و سیگنال حاصله را برای متعادلسازی می فرستیم. به این کار متعادلسازی با فاصله گذاری جزیی<sup>۳</sup> گفته می شود.

سپس خروجی متعادل ساز تخمینی از سیگنال ورودی را ارائه می دهد. در این جا سیگنال از یک بلوک تصمیم عبور می کند که سیگنال حاصله را به سمبلی که در الفبای سیگنال ارسالی باشد گرد می-کند. در مرحله آموزش سیگنال متعادل سازی شده از بلوک به روز کردن ضرایب عبور می کند تا ضرایب را طوری تغییر دهد که خروجی متعادل ساز با رشته آموزش از قبل تعیین شده هماهنگ شود و در فرآیند دنباله روی از خطای حاصل از بلوک تصمیم جهت تنظیم ضرایب متعادل ساز استفاده می-شود.

فرض کنید  $f(t)$  ترکیبی از توابع تبدیل پاسخ ضربه باند پایه فرستنده، کانال و فیلتر منطبق باشد.

$$f(t) = g(t) * c(t) * g_m^*(-t) \quad (1-2)$$

در این حالت خروجی فیلتر منطبق خواهد بود

$$y(t) = d(t) * f(t) + n_g(t) = \sum d_k f(t - kT) + n_g(t) \quad (1-3)$$

در حالی که  $n_g(t) = n(t) * g_m^*(-t)$  معادل نویز باند پایه در ورودی متعادل ساز و  $T$  زمان هر سمبل است. اگر فرض کنیم  $f[n] = f(nT_s)$  بیان گر نمونه های  $f(t)$  در هر  $T_s$  ثانیه باشد، با نمونه گیری از  $y(t)$  در هر  $T_s$  ثانیه، سیگنال گسسته در زمان  $y[n] = y(nT_s)$  را به صورت زیر خواهیم داشت

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum d_k f(nT_s - kT_s) + n_g(nT_s) \\ &= \sum d_k f[n-k] + v[n] \\ &= d_n[f_0] + \sum d_k f[n-k] + v[n] \end{aligned} \quad (1-4)$$

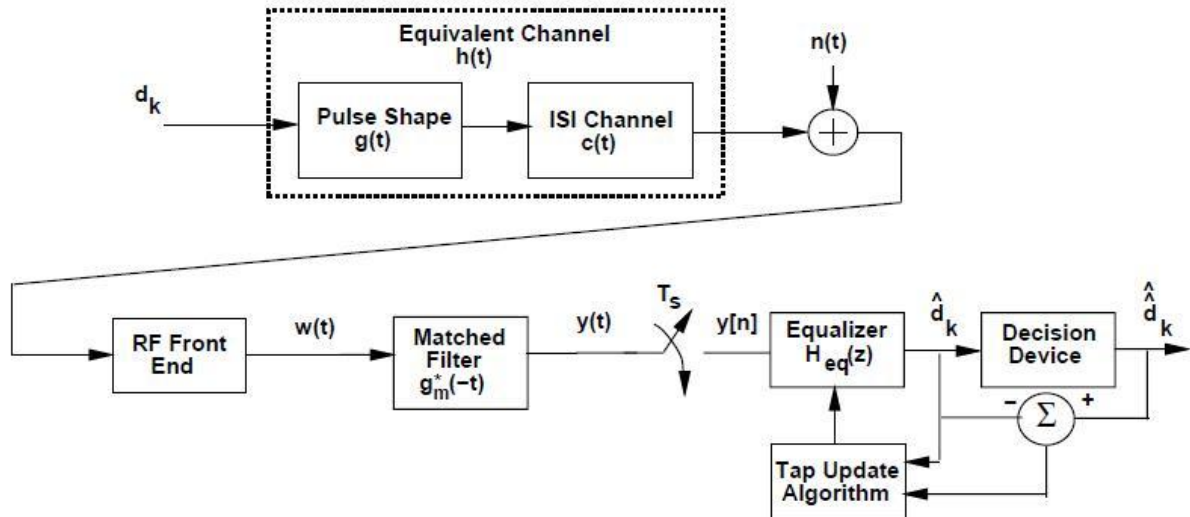
<sup>1</sup> Analog Matched Filter

<sup>2</sup> Timing Sensitivity

<sup>3</sup> Fractionally Spaced Equalization



در عبارت بالا، بخش اول نشان دهنده بیت های داده مطلوب، بخش دوم نمایان گر ISI و بخش سوم معرف نویز می باشد. واضح است برای داشتن یک ارتباط بدون ISI باید  $f[n-k] = 0, k \neq n$  باشند. یعنی  $f[k] = \delta[k]f[0]$  و رابطه بالا به شکل  $y[n] = d_n[f_0] + v[n]$  در خواهد آمد.



شکل ۴-۱ بلوک دیاگرام از ابتدا تا انتها

می توان اثبات کرد که برای داشتن یک ارتباط بدون ISI،  $f[k] = \delta[k]f[0]$ ، باید داشته باشیم

$$F_{\Sigma}(f) \triangleq \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(f + \frac{n}{T_s}) = f[0] \quad (1-5)$$

تابع  $F_{\Sigma}(f)$  گاهی به طیف دو لایه (تا شده) تعبیر می شود و  $F_{\Sigma}(f) = f(0)$  بیانگر صاف<sup>۱</sup> بودن طیف دو لایه می باشد.

### ۴-۳-۱ متعادل سازهای خطی

در قسمت قبل دیدیم که اگر  $F_{\Sigma}(f)$  کاملاً صاف نباشد می توانیم از بلوک متعادل ساز در شکل ۴-۱ جهت کاهش ISI استفاده کنیم. در این بخش برای پیاده سازی این بلوک ما از یک متعادل ساز خطی که توسط یک فیلتر متقاطع با  $N = 2L + 1$  ضریب پیاده سازی می شود استفاده می کنیم

$$H_{eq}(z) = \sum_{i=-L}^L w_i z^{-i} \quad (1-6)$$

معمولاً طول متعادل ساز،  $N$ ، توسط ملاحظات پیاده سازی تعیین می شود چرا که با افزایش  $N$  پیچیدگی محاسبات بیشتر می شود. متعادل سازهای خطی علی دارای  $w_L = 0$  برای  $i < 0$  هستند. برای

<sup>1</sup> Flat

یک طول مشخص و پاسخ فرکانسی کانال داده شده، طراحی متعادل‌ساز باید وزن ضرائب  $\{w_i\}_{i=-L}^L$  و الگوریتمی که این ضرایب را با تغییر کانال به روز کند ارائه دهد. معیار ما در مخابرات بدون سیم احتمال بروز خطا<sup>۱</sup> می باشد. بنابراین بهینه ترین انتخاب ما جهت ضرایب متعادل‌سازی ضرایبی هستند که احتمال خطا را به حداقل برسانند. از آن جایی که ما نمی توانیم مستقیماً روشی برای بهینه سازی ضرایب در جهت نیل به معیار خود داشته باشیم، ناچاریم از روشی غیر مستقیم برای برقراری تعادلی ما بین کاهش ISI و عدم افزایش نویز استفاده کنیم. در این بخش به بررسی دو متعادل‌ساز خطی می-پردازیم: متعادل‌ساز ZF<sup>۲</sup> و متعادل‌ساز MMSE<sup>۳</sup>. روش اول می تواند به کلی اثر ISI را از بین ببرد ولی به شدت نویز را افزایش می دهد. تکنیک دوم میانگین مربع خطا بین سمبل های ارسالی و سمبل-های آشکار شده در خروجی متعادل‌ساز را می نیم می کند، در حالی که تعادل بهتری بین مقابله با ISI و افزایش نویز برقرار می کند. به دلیل همین تعادل مطلوب، متعادل‌سازهای MMSE کارایی بهتری از نقطه نظر نرخ خطای بیت نسبت به متعادل‌سازهایی که از الگوریتم ZF استفاده می کنند دارند.

الف) متعادل‌سازهای ZF (صفر اجباری)

نمونه های ورودی به متعادل‌ساز  $\{y_n\}$  می توانند بر اساس پاسخ ترکیبی سیستم گسسته سازی شده  $f(t)$   $H(t) * g^*(-t) =$  به صورت زیر بیان شوند

$$Y(z) = D(z)F(z) + N_g(z) \quad (1-7)$$

که در آن  $N_g(z)$  طیف توان نویز سفید پس از گذر از فیلتر منطبق  $G_m^*(\frac{1}{z^*})$  می باشد و

$$F(z) = H(z) G_m^*(\frac{1}{z^*}) = \sum f(nT_s) z^{-n} \quad (1-8)$$

متعادل‌ساز ZF کل ISI موجود در پاسخ ترکیبی  $f(t)$  را از بین می برد. چنین متعادل‌سازی با رابطه

$$H_{ZF}(z) = 1/F(z) \quad (1-9)$$

بیان می شود. این رابطه معادل گسسته در زمان متعادل‌ساز آنالوگی است که قبل تر توضیح داده شد و همان مشخصات را از نظر افزایش نویز دارد. به طور مشخص طیف توان  $N(z)$  به صورت زیر داده می شود:

<sup>1</sup> Probability of Error(Outage Probability)

<sup>2</sup> Zero Forcing

<sup>3</sup> Minimum Mean Square Error

$$N(z) = N_g(z) |H_{ZF}(z)|^2 = \frac{N_0 |G_m^*(\frac{1}{z^*})|^2}{|F(z)|^2} = \frac{N_0 |G_m^*(\frac{1}{z^*})|^2}{|H(z)|^2 |G_m^*(\frac{1}{z^*})|^2} = \frac{N_0}{|H(z)|^2} \quad (1-10)$$

از رابطه فوق مشخص می شود در صورتی که کانال  $H(z)$  در فرکانس خاصی از پهنای باندش ناگهانی تضعیف شود (کانال داری محو شدگی ناشی از انتخاب فرکانس)<sup>۱</sup> توان نویز به شدت افزایش می یابد. متعادل ساز ZF که به صورت  $H_{ZF}(z) = \frac{1}{F(z)}$  بیان می شود ممکن است به صورت یک فیلتر با پاسخ ضربه محدود<sup>۲</sup> قابل پیاده سازی نباشد. همچنین ممکن است یک مجموعه محدود از ضرایب  $w_{-L}, \dots, w_L$  نتوان یافت که رابطه زیر را برقرار سازند.

$$w_{-L}z^L + \dots + w_Lz^{-L} = \frac{1}{F(z)} \quad (1-11)$$

در این صورت ما ضرایب  $\{w_i\}$  را به طوری به دست می آوریم که بهترین تخمین از متعادل ساز ZF را داشته باشیم. قطعاً این راه حل یکتا و سهل الوصول نخواهد بود چرا که می بایست برای تمامی مقادیر  $z$  صادق باشد. روش های مختلفی برای دستیابی برای این تخمین وجود دارد. یک تکنیک آن است که  $H_{ZF}(z)$  را به صورت یک فیلتر با پاسخ ضربه نامحدود<sup>۳</sup> بیان کرد،  $\frac{1}{F(z)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i z^{-i}$  و سپس  $w_i = c_i$  را تنظیم کرد. می توان نشان داد برای  $z = e^{j\omega}$  این مفروضات رابطه زیر را می نیم می کند

$$\left| \frac{1}{F(z)} - w_{-L}z^L \dots w_Lz^{-L} \right|^2 \quad (1-12)$$

همچنین ضرایب می توانند طوری تنظیم شوند که اعوجاج پیک<sup>۴</sup> (بدترین نوع ISI) را کاهش دهد.

## ب) متعادل ساز MMSE

در این نوع از متعادل سازی هدف از طراحی متعادل ساز حداقل کردن میانگین مربع خطا ما بین سمبل ارسالی  $d_k$  و سمبل دریافتی در خروجی متعادل ساز  $\hat{d}_k$  است. به عبارت بهتر،  $\{w_i\}$  ها به نوعی انتخاب می شوند که  $E[d_k - \hat{d}_k]$  را می نیم کنند. از آن جایی که MMSE یک روش خطی برای متعادل سازی است خروجی آن  $\hat{d}_k$  ترکیبی خطی از نمونه های ورودی است  $y[k]$

<sup>1</sup> Frequency Selective Fading Channels

<sup>2</sup> Finite Impulse Response (FIR)

<sup>3</sup> Infinit Impulse Response(IIR)

<sup>4</sup> Peak Distortion

$$\hat{d}_k = \sum_{i=-L}^L w_i y[k-i] \quad (1-13)$$

طبق معمول یافتن ضرایب بهینه برای فیلتر  $\{w_i\}$  مشکل استاندارد در تخمین خطی است. در حقیقت اگر نویز ورودی به فیلتر سفید باشد این یک مسئله فیلترینگ وینر<sup>۱</sup> استاندارد خواهد بود. با این حال به علت وجود فیلتر منطبق  $g_m^*(-t)$  در ورودی گیرنده، نویز ورودی به متعادل ساز نه تنها سفید نبوده بلکه رنگی با طیف توان  $N_0 \left| G_m^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \right|^2$  خواهد بود. بنابراین جهت به کار گیری روش های شناخته شده برای تقریب خطی بهینه ما فیلتر را به دو قسمت تقسیم می کنیم: یک بخش سفید کننده نویز و یک بخش حذف کننده ISI. شکل ۵-۱ این مجموعه را نشان می دهد.

وظیفه بلوک سفید کننده نویز همانطور که از اسم آن پیداست سفید کردن نویز است به طوری که نویز خروجی از این فیلتر دارای طیف توان ثابت باشد. از آن جایی که نویز ورودی به گیرنده دارای طیف توان  $N_0 \left| G_m^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \right|^2$  می باشد بهترین فیلتر سفید کننده نویز به صورت  $1/G_m^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$  خواهد بود. البته این فیلتر تنها انتخاب ما نخواهد بود و ما می توانیم از فیلترهای دیگری با مشخصات بهتر (مثل پایداری) نیز استفاده کنیم. ممکن است ابتدا این فکر که ما از فیلتر منطبق در ورودی گیرنده استفاده می کنیم و بعد در متعادل ساز اثر آن را حذف می کنیم غیر طبیعی به نظر آید در حالی که هدف ما از استفاده از این فیلتر افزایش SNR قبل از نمونه برداری بوده است. کل این مجموعه طراحی متعادل ساز را برای ما در جهت می نیم کردن میانگین مربعات خطا ساده تر می کند.

فرض می کنیم فیلتر  $\hat{H}_{eq}(z)$  یک فیلتر خطی با ورودی  $v_n$  و  $N = 2L + 1$  ضریب می باشد

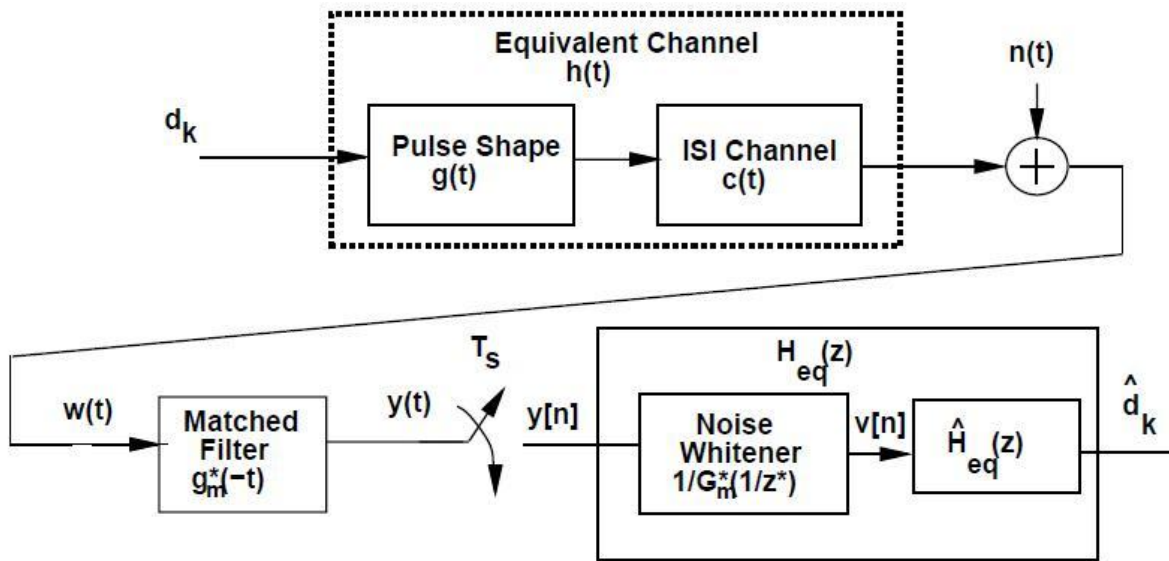
$$\hat{H}_{eq}(z) = \sum_{i=-L}^L w_i z^{-i} \quad (1-14)$$

هدف ما طراحی ضرایب  $\{w_i\}$  به طوریست که  $E[d_k - \hat{d}_k]^2$  می نیم شود. به عنوان بردار ورودیها به  $\hat{H}_{eq}(z)$  بردار  $\hat{v} = (v[k+L], v[k+L-1], \dots, v[k-L]) = (v_{k+L}, v_{k+L-1}, \dots, v_{k-L})$  را بدست آورده خروجی فیلتر  $\hat{d}_k$  و بردار  $w = (w_{-L}, \dots, w_L)$  را به عنوان بردار ضرایب فیلتر معرفی می کنیم. بنابراین خواهیم داشت

$$\hat{d}_k = w^T v = v^T w \quad (1-15)$$

و می خواهیم که میانگین مربع خطا را می نیم کنیم

<sup>1</sup> Wiener Filtering



شکل ۵-۱ متعادلسازی به روش MMSE

$$J = E[d_k - \hat{d}_k]^2 = E[w^T v v^H w^* - 2R\{v^H w^* d_k\} + |d_k|^2] \quad (1-16)$$

$v_d = E[v v^H]$  و  $M_v = E[v v^H]$  را تعریف می کنیم. ماتریس هرمیتی  $N \times N$  و  $v_d = E[v^H d_k]$  یک بردار سطری با طول  $N$  است. فرض کنید  $E[|d_k|^2] = 1$ . برای  $J$ ، MSE خواهد بود

$$J = w^T M_v w^* - 2R\{v_d w^*\} + 1 \quad (1-17)$$

ما بردار ضرائب بهینه را با تنظیم کردن گرادیان<sup>۲</sup>  $\nabla_w J = 0$  و حل کردن آن برای  $w$  بدست می آوریم. از رابطه بالا، گرادیان به صورت زیر داده می شود

$$\nabla_w J = \left( \frac{\partial J}{\partial w_{-L}}, \dots, \frac{\partial J}{\partial w_L} \right) = 2w^T M_v - 2v_d \quad (1-18)$$

تساوی این عبارت با صفر نتیجه می دهد که  $w^T + M_v = v_d$  و بردار ضرائب بهینه به صورت

$$w_{opt} = (M_v^T)^{-1} v_d^T \quad (1-19)$$

خواهد بود. حل معادله برای  $w_{opt}$  نیاز به معکوس کردن ماتریس با توجه به ورودی های فیلتر دارد. بنابراین پیچیدگی محاسباتی<sup>۳</sup> بسیار بالا و در مراتب  $N^2$  یا  $N^3$  عملیات است. با جایگزینی در این بردارهای ضرائب بهینه، ما مربع میانگین خطا را به صورت زیر خواهیم داشت

<sup>1</sup> Hermitian

<sup>2</sup> Gradient

<sup>3</sup> Computational Complexity

$$J_{\min} = 1 - v_d M_v^{-1} v_d^H \quad (1-20)$$

برای یک متعادل ساز با طول نامحدود داریم

$$v = (v_{n+\infty}, \dots, v_n, \dots, v_{n-\infty}) \quad (1-21)$$

$$w = (w_{-\infty}, \dots, w_0, \dots, w_{\infty}) \quad (1-22)$$

در این حالت می توانیم معادله  $w^T M_v = v_d$  را به صورت زیر بنویسیم

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} w_i (f[j-i] + N_0) \delta[j-i] = g_m^*[-j], \quad -\infty \leq j \leq \infty \quad (1-23)$$

با استفاده از تبدیل  $z$  و یادآوری آنکه  $\hat{H}_{eq}(z)$  تبدیل  $z$  ضرائب فیلتر  $w$  است داریم

$$\hat{H}_{eq}(z) = \frac{G_m^*(\frac{1}{z^*})}{F(z) + N_0} \quad (1-24)$$

از آنجایی که متعادل ساز MMSE از دو بخش فیلتر سفید کننده نویز و بخش حذف کننده ISI تشکیل شده است، متوجه می شویم در صورت عدم وجود محدودیت طول خواهیم داشت

$$H_{eq}(z) = \frac{\hat{H}_{eq}(z)}{G_m^*(\frac{1}{z^*})} \quad (1-25)$$

سه موضوع قابل توجه در رابطه با این نتیجه گیری وجود دارد. اول اینکه متعادل ساز MMSE با طول نامحدود ایده آل، اثر فیلتر سفید کننده نویز را از بین می برد. ثانیاً این فیلتر با طول نامحدود در صورت نبودن نویز (قسمت  $N_0$ ) همانند متعادل ساز ZF بوده و نتیجه یکسانی دارند. در نهایت این طراحی متعادل ساز ایده آل نمونه خوبی از معکوس کردن کانال و تعادل آن با افزایش نویز می باشد. در صورت افزایش نویز شدید در برخی فرکانسها،  $N_0$  در مخرج مانع از افزایش شدید نویز توسط متعادل ساز می شود. با این حال در فرکانس هایی که چگالی طیف توان نویز  $N_0$  در مقایسه با کانال  $F(z)$  کوچک باشد، متعادل ساز به طور موثری  $F(z)$  را معکوس می کند.

برای متعادل ساز بالا میتوان نشان داد که MSE می نیمم بر حسب طیف دو لایه به صورت زیر قابل بیان است

$$J_{\min} = T_s \int_{-0.5/T_s}^{0.5/T_s} \frac{N_0}{F_{\Sigma}(f) + N_0} df \quad (1-26)$$

این نوع بیان از MMSE مشخصه های جالب گوناگونی دارد. اولاً می توان نشان داد همانطور که حدس زده می شد  $0 \leq J_{\min} = E[d_k - \hat{d}_k]^2 \leq 1$ . بعلاوه مادامی که در پهنای باند مطلوب سیگنال  $F_{\Sigma}(f) \neq 0$  باشد، در صورت عدم حضور نویز  $J_{\min} = 0$  خواهد شد. همچنین اگر  $N_0 = \infty$  داریم  $J_{\min} = 1$ .

### ۵-۳-۱ تخمین رشته اطلاعات با بیشترین شباهت (MLSE)

روش MLSE باعث افزایش نویز نمی شود چرا که در متعادل سازی از فیلترینگ استفاده نمی کند و در عوض به تخمین سمبل های ارسالی می پردازد. ساختار این متعادل ساز همانند شکل ۴-۱ می باشد، با این تغییر که در آن بلوک های متعادل سازی و تصمیم گیری با الگوریتم MLSE جایگزین شده اند. برای یک پاسخ کانال دلخواه  $h(t)$ ، MLSE آن رشته ورودی  $\{d_k\}$  را انتخاب می کند که بیشترین شباهت را به سیگنال دریافتی  $w(t)$  داشته باشد.

با استفاده از فرایند متعامد سازی گرام-اشمیت<sup>۱</sup> می توانیم  $w(t)$  را در بازه زمانی  $[0, LT_s]$  به شکل زیر بیان کنیم

$$w(t) = \sum_{n=1}^N w_n \varphi_n(t) \quad (1-27)$$

که در آن  $\{\varphi_n(t)\}$  مجموعه کاملی از بردارهای متعامد را تشکیل می دهد. از آنجایی که  $w(t)$  در بازه  $[0, LT_s]$  به  $d_0, \dots, d_L$  بستگی دارد، عدد  $N$  از توابع این مجموعه، تابعی از حافظه کانال می باشد. با بسط این رابطه خواهیم داشت

$$w_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k h_{nk} + v_n = \sum_{k=0}^L d_k h_{nk} + v_n \quad (1-28)$$

که در آن :

$$h_{nk} = \int_0^{LT_s} h(t - kT_s) \varphi_n^*(t) dt \quad (1-29)$$

$$v_n = \int_0^{LT_s} n(t) \varphi_n^*(t) dt \quad (1-30)$$

$v_n$  ها متغیرهای تصادفی گاوسی مختلط با میانگین صفر و کواریانس  $0.5E[v_n^* v_m] = N_0 \delta[n-m]$  هستند. بنابراین  $w^N = (w_1, \dots, w_N)$  دارای توزیع گاوسی چند متغیره زیر خواهد بود

<sup>1</sup> Gram-Schmidt Process

$$p(w^N | d^L, h(t)) = \prod_{n=1}^N \left[ \frac{1}{\pi N_0} \exp \left[ -\frac{1}{N_0} |w_n - \sum_{k=0}^L d_k h_{nk}|^2 \right] \right] \quad (1-31)$$

بنابراین برای یک سیگنال دریافتی  $w(t)$  یا به طور معادل  $w^N$ ، MLSE آن را به صورت رشته سمبل  $d^L$  رمزگشائی می کند، به طوریکه تابع شباهت  $p(w^N | d^L, h(t))$  (یا لگاریتم این تابع) ماکزیمم شود. یعنی MLSE دنباله خروجی را به شکل زیر خواهد داشت

$$\begin{aligned} \hat{d}^L &= \operatorname{argmax}[\log p(w^N | d^L, h(t))] \\ &= \operatorname{argmax}[2R\{\sum_k d_k^* \sum_{n=1}^N w_n h_{nk}^*\} - \sum_k \sum_m d_k d_m^* \sum_{n=1}^N h_{nk} h_{nm}^*] \end{aligned} \quad (1-32)$$

و با معادل سازی سیگماهای فوق با مقادیر  $y[n]$  و  $f[k-m]$  خواهیم داشت

$$\hat{d}^L = \operatorname{argmax}[2R\{\sum_k d_k^* y[k]\} - \sum_k \sum_m d_k d_m^* f[k-m]] \quad (1-33)$$

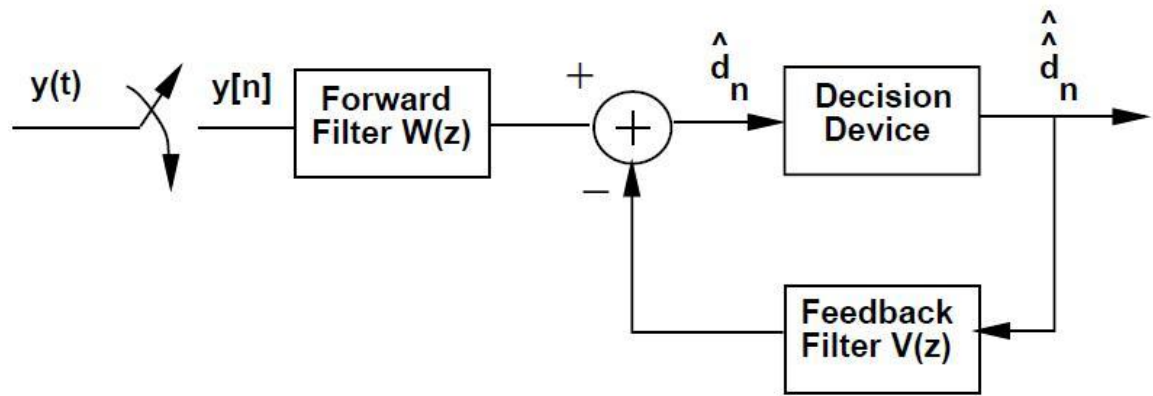
از این معادله مشاهده می شود که خروجی MLSE تنها به خروجی نمونه بردار  $\{y[k]\}$  و پارامترهای کانال  $f[n-k]=f(nT_s-kT_s)$  بستگی دارد که در آن  $f(t)=h(t)*h^*(-t)$ . از آنجایی که پیاده سازی ما نشان می دهد MLSE فقط به خروجی کانال وابسته است، بنابراین فیلتر منطبق شکل ۴-۱ برای این روش بهینه خواهد بود (یعنی در صورت استفاده از MLSE، فیلتر منطبق علاوه بر اینکه در حضور AWGN کاراست، در برابر ISI نیز عملکرد خوبی دارد. با استفاده از الگوریتم ویتربی<sup>۱</sup> برای پیاده سازی MLSE می توان پیچیدگی را کاهش داد، در عین حال با افزایش گسترش تأخیر پیچیدگی به صورت نمایی افزایش می یابد. در ادامه به توضیح روشی غیر خطی با پیچیدگی کمتر میپردازیم.

### ۱-۳-۶ متعادل سازی فیدبک تصمیم (DFE)

متعادل ساز DFE تشکیل شده است از یک فیلتر پیش سو  $B(z)$  که ورودی آن رشته اطلاعات دریافتی است (همانند متعادل ساز خطی)، به همراه یک بلوک فیدبک  $D(z)$  که ورودی آن دنباله دریافتی قبلی می باشد. ساختار DFE در شکل زیر نمایش داده شده است.

<sup>1</sup> Viterbi Algorithm





شکل ۶-۱ ساختار متعادل‌ساز DFE

با فرض اینکه  $w(z)$  دارای  $N_1$  ضریب و  $V(z)$  دارای  $N_2$  ضریب باشند، خروجی DFE را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\hat{d}_k = \sum_{i=-N_1}^0 w_i y[k-i] - \sum_{i=1}^{N_2} v_i \hat{\hat{d}}_{k-i} \quad (1-34)$$

روش معمول برای انتخاب ضرایب  $w(z)$ ،  $v(z)$ ، ZF (حذف کل ISI) و یا MMSE (متوسط مربع خطای مورد انتظار بین خروجی DFE و سمبل اصلی را می‌نیم می‌کند) می‌باشد. اثبات شده است که در صورتی که هر دو  $w(z)$ ،  $v(z)$  دارای طول نامحدود باشند، فیلتر بهینه پیش سو برای ZF به صورت  $1/G_m^*(\frac{1}{z^*})$  می‌باشد. در این حالت فیلتر فیدبک  $v(z)$  باید ضرورتاً مشابه کانال باند پایه ترکیبی  $F(z)$  باشد.

برای حوزه MMSE هدف ما می‌نیم کردن  $E[d_k - \hat{d}_k]^2$  می‌باشد. فرض کنید  $f_n = f[n]$  نمایانگر نمونه‌های  $f(t)$  باشد. در این صورت این روش می‌نیم سازی بیان می‌کند که ضرایب فیلتر پیش سو می‌بایست مجموعه معادلات خطی زیر را برآورده نماید

$$\sum_{i=-N_1}^0 q_{li} w_i = f_{-l}^* \quad (1-35)$$

$$q_{li} = \sum_{j=-l}^0 f_j^* f_{j+l-i} + N_0 \delta[l-i], \quad l, i = -N_1, \dots, 0 \quad (1-36)$$

پس از آن ضرایب فیلتر فیدبک برای این فیلتر پیش سو به صورت زیر خواهد بود

$$v_k = -\sum_{i=-N_1}^0 w_i f_{k-i} \quad (1-37)$$

در صورتی که هیچگونه خطای تصمیمی وجود نداشته باشد، یعنی  $\hat{d}_k = d_k$  این ضرائب کاملاً ISI را بی اثر می کنند. سالز<sup>۱</sup> نشان داده است که مقدار خطای می نیم شده حاصل را، به صورت زیر بدست می آوریم

$$J_{\min} = \exp \left[ T_s \int_{-0.5/T_s}^{0.5/T_s} \ln \left[ \frac{N_0}{F_{\Sigma}(f) + N_0} \right] df \right] \quad (1-38)$$

عموماً صرف نظر از اثر خطاهای فیدبک، میزان MMSE در روش DFE بسیار کمتر از روش متعادلسازی خطی است.

از آنجایی که ISI جدا شده از طریق مسیر فیدبک، ISI واقعی مربوط به  $d_n$  نمی باشد، در صورت برابر نبودن  $d_k$  و  $\hat{d}_k$ ، DFE دارای خطای فیدبک خواهد شد. این خطا نهایتاً در تصمیم گیری مربوط به انتخاب هر بیت اثر می گذارد. بعلاوه این خطای منتشر شده، توسط کدینگ کانال نیز قابل اصلاح نمی باشد، چرا که مسیر فیدبک بر روی سمبل های کد شده کانال قبل از بلوک رمزگشایی عمل می کند.

آنچه تاکنون عنوان شد، روشهای شناخته شده و تعمیم یافته در دانش متعادلسازی می باشند، علاوه بر این روشها می توان به روشهایی همچون ایجاد تغییرات در الگوریتم ویتربی برای اصلاح روش MLSE، تکنیک های مبتنی بر توربو دیکدرها<sup>۲</sup> و متعادلسازی توربو<sup>۳</sup>، و همچنین تخمین کانال در فرستنده جهت پیش متعادلسازی<sup>۴</sup> که شامل روشهایی چون پیش کدینگ تاملینسون - هاراشیما<sup>۵</sup> می شود نیز اشاره کرد. در بخش بعد به مطالعه روشهای تطبیقی متعادلسازی پرداخته و در میان آنها روشهایی که بدون استفاده از دنباله آموزش کار می کنند را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

<sup>۱</sup> Salz

<sup>۲</sup> Turbo Decoder

<sup>۳</sup> Turbo Equalization

<sup>۴</sup> Pre - Equalization

<sup>۵</sup> Tomlinson - Harashima

## بخش دوم: متعادلسازی تطبیقی

در بخش قبل، انواع متعادلسازی های خطی و غیر خطی را جهت جبران ISI درگیرنده های دیجیتالی در کانالهای دارای پهنای باند محدود غیر ایده آل بررسی کردیم. دیدیم که برخی گیرنده ها روش MLSE را برای آشکارسازی رشته اطلاعات داده از نمونه های خروجی انتخاب می کنند و برخی دیگر یکی از دو روش متعادلسازی خطی و یا روش DFE را بر می گیرند.

در توسعه روشهای متعادلسازی، ما فرض کردیم که مشخصات کانال اعم از پاسخ ضربه و یا پاسخ فرکانسی برای گیرنده شناخته شده اند. در حالی که در بسیاری از سیستم های مخابراتی، نه تنها مشخصات کانال از ابتدا برای گیرنده شناخته شده نیست، بلکه پاسخ کانال متغیر با زمان نیز می باشد. در چنین حالتی متعادل ساز طوری طراحی می شود که برای پاسخ کانال قابل تنظیم بوده و در شرایط کانال های متغیر با زمان ضرائب فیلتر به صورت تطبیقی<sup>۱</sup> (وفقی) قابل تغییر باشند.

در این فصل، ما به ارائه الگوریتم هایی برای تنظیم ضرائب متعادل ساز جهت بهینه سازی عملکرد فیلتر و جبران تغییرات مشخصات کانال به صورت تطبیقی می پردازیم.

---

<sup>1</sup> Adaptive

## ۱-۲ متعادلسازی خطی تطبیقی

به یاد داریم که در روش متعادلسازی خطی از دو روش متفاوت برای بدست آوردن ضرائب متعادل ساز استفاده می کنیم. یکی از روشها بر اساس می نیم کردن اعوجاج قله موج<sup>۱</sup> در خروجی متعادل ساز و دیگری بر اساس می نیم کردن میانگین مربعات خطا کار می کنند. در ادامه به ارائه دو روش برای بهینه سازی به صورت خودکار و تطبیقی می پردازیم.

### ۱-۱-۲ الگوریتم ZF

در حوزه اعوجاج قله موج این اعوجاج  $D(c)$  از طریق تنظیم ضرائب متعادل ساز  $\{c_k\}$  می نیم می شود: به طور کلی، به جز در مواردی که اعوجاج قله در ورودی متعادل ساز کوچکتر از یک باشد، الگوریتم محاسبه ساده ای برای این بهینه سازی وجود ندارد. در صورتی که  $D_0 < 1$  باشد، اعوجاج  $D(c)$  در خروجی متعادل ساز از طریق اجبار بر روی پاسخ متعادل ساز  $q_n=0$ ، برای  $1 \leq |n| \leq K$  و  $q_0=1$  می نیم می شود. در این حالت الگوریتم ساده ZF برای دستیابی به این هدف وجود خواهد داشت.

راه حل ZF با اعمال همبستگی متقابل<sup>۲</sup> بین دنباله خطا  $\epsilon_k = I_k - \hat{I}_k$  و رشته اطلاعات مطلوب  $\{I_k\}$  و قرار دادن آن برابر صفر در بازه  $0 \leq |n| \leq K$  بدست می آید. داریم

$$E(\epsilon_k I_{k-j}^*) = E[(I_k - \hat{I}_k) I_{k-j}^*] \quad (2-1)$$

$$= E(I_k I_{k-j}^*) - E(\hat{I}_k I_{k-j}^*), j = -K, \dots, K$$

فرض می کنیم سمبل های اطلاعات ناممبسته<sup>۳</sup> بوده  $E(I_k I_j^*) = \delta_{kj}$  و همچنین رشته اطلاعات  $\{I_k\}$  با دنباله نویز جمعی  $\{\eta_k\}$  غیر وابسته باشند. پس از میانگین گیری از رابطه بالا و جایگذاری  $\hat{I}_k$  خواهیم داشت

$$E(\epsilon_k I_{k-j}^*) = \delta_{j0} - q_j, j = -K, \dots, K \quad (2-2)$$

بنابراین شرط زیر به ازای  $q_0=1$  و  $q_n = 0$  و  $1 \leq |n| \leq K$  برآورده می شود

<sup>1</sup> Peak Distortion

<sup>2</sup> Cross Correlation

<sup>3</sup> Uncorrelated

$$E(\epsilon_k I_{k-j}^*) = 0 \quad (2-3)$$

زمانی که پاسخ کانال ناشناخته باشد، تابع همبستگی متقابل ارائه شده توسط معادله ۲-۱ نیز ناشناخته خواهد بود. توسط ارسال یک دنباله آموزش<sup>۱</sup>  $\{I_k\}$  به گیرنده می توان بر این مشکل غلبه کرد؛ یعنی با تخمین همبستگی متقابل توسط جابجایی میانگین های زمانی با میانگین های گروهی<sup>۲</sup> در معادله ۲-۱. پس از آموزش اولیه در آن به ارسال دنباله آموزشی با طول از پیش تعیین شده برابر یا بیشتر از طول متعادل ساز می پردازیم و آن ضرائبی که در معادله ۲-۳ صدق کنند بدست می آیند. یکی از الگوریتم های بازگشتی موجود برای تنظیم ضرائب متعادل ساز به صورت زیر است

$$c_j^{(k+1)} = c_j^{(k)} + \Delta \epsilon_k I_{k-j}^* \quad (2-4)$$

که در آن  $c_j^{(k)}$  مقدار ضریب زام در لحظه  $t=kT$  و  $\epsilon_k = I_k - \hat{I}_k$  سیگنال خطا در زمان  $t = kT$  و  $\Delta$  ضریب مقیاس<sup>۳</sup> بوده که نرخ تنظیمات را کنترل می کند. قسمت  $\epsilon_k I_{k-j}^*$  تخمینی از همبستگی متقابل (میانگین گروهی)  $E(\epsilon_k I_{k-j}^*)$  می باشد. عملیات میانگین گیری در همبستگی متقابل توسط معادله دیفرانس مرتبه اول در معادله ۲-۴ که معرف یک انتگرال گیر ساده گسسته در زمان است بدست می آید.

پس از اینکه ضرائب متعادل ساز به نقطه مناسب خود همگرا<sup>۴</sup> شدند، با ادامه دوره آموزش، تصمیماتی که در خروجی آشکارساز گرفته می شوند، تا حد قابل قبولی مورد اعتماد هستند تا توسط آن فرایند تطبیق دادن ضرائب را دنبال کنیم. به این روش، تصمیم مستقیم (هدایت شده توسط تصمیمات) گفته می شود. در چنین حالتی همبستگی متقابل در معادله ۲-۴، با سینگنال خطا  $\tilde{\epsilon}_k$  و رشته اطلاعات خروجی  $\tilde{I}_{k-j}$ ،  $j = -k, \dots, k$  در گیر می شود. بنابراین در حالت تطبیقی معادله ۲-۴ به صورت زیر در می آید

$$c_j^{(k+1)} = c_j^{(k)} + \Delta \tilde{\epsilon}_k \tilde{I}_{k-j}^* \quad (2-5)$$

شکل ۲-۱ متعادل ساز ZF را در حالات آموزشی و تطبیقی نشان میدهد.

<sup>1</sup> Training Sequence

<sup>2</sup> Ensemble Average

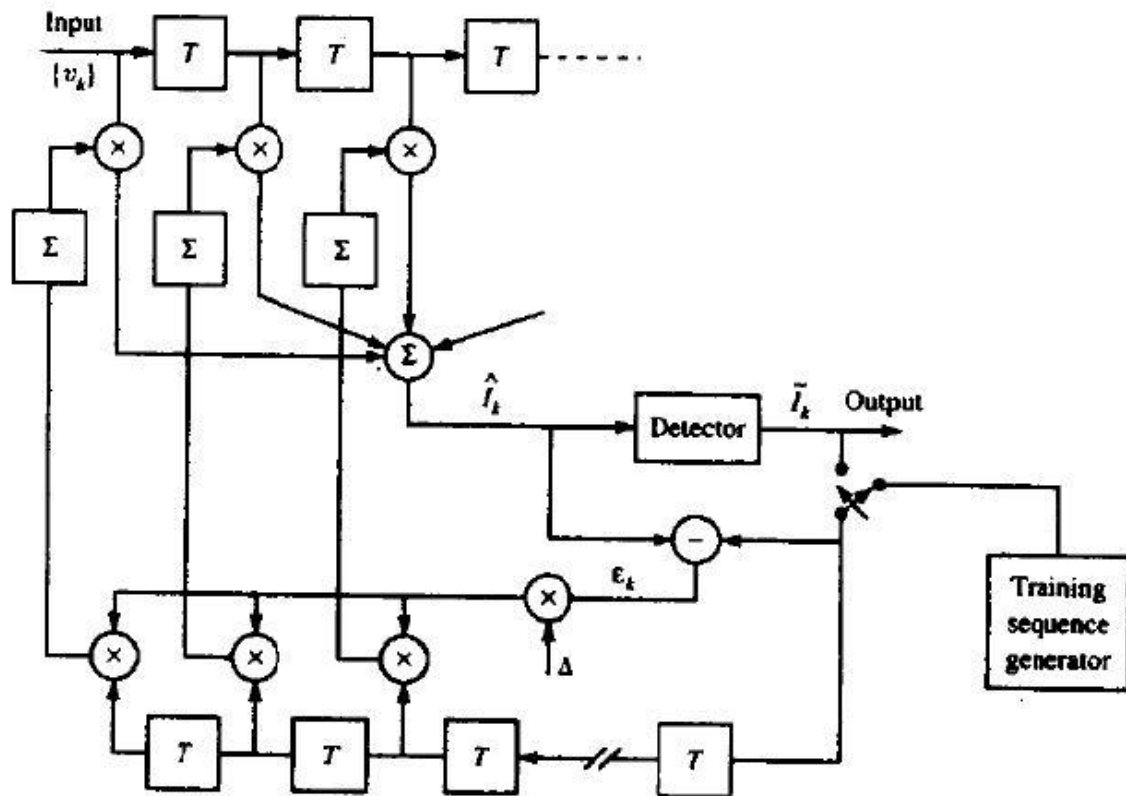
<sup>3</sup> Scale Factor

<sup>4</sup> Converged

## ۲-۱-۲ الگوریتم LMS

در فرایند می نیم کردن میانگین مربع خطا، یافتیم که ضرائب بهینه متعادل ساز از طریق حل مجموعه ای از معادلات خطی بدست می آیند. این معادلات در فرم ماتریسی به شکل زیر نوشته می-شوند:

$$\Gamma C = \xi \quad (2-6)$$



شکل ۲-۱ متعادل ساز ZF تطبیقی

که در آن  $\Gamma$  ماتریس کوواریانس  $(2K+1)(2K+1)$  نمونه های سیگنال  $\{v_k\}$ ،  $C$  بردار ستونی از ضرائب متعادل ساز  $(2K+1)$ ، و  $\xi$  یک بردار  $(2K+1)$  بعدی از ضرائب فیلتر می باشند. یافتن بردار ضرائب بهینه متعادل ساز می تواند از طریق معکوس کردن ماتریس کوواریانس حاصل آید که می تواند توسط روش لونیسون- در بین<sup>۱</sup> به بهترین شکل صورت پذیرد [7].

<sup>1</sup> Levinson-Durbin

روش دیگری را که می توان برای محاسبه  $C_{opt}$  بدون معکوس نمودن مستقیم ماتریس استفاده نمود یک روش تکراری است. احتمالاً ساده ترین روش تکراری روش سریع ترین فرود<sup>1</sup> است که با انتخاب یک مقدار دلخواه برای  $C$  مثلاً  $C_0$  آغاز می شود. این انتخاب اولیه ضرایب، متناظر نقطه ای روی سطح توان MSE در فضای  $(2K+1)$  بعدی ضرایب است. بردار گرادیان  $G_0$  که دارای  $(2K+1)$  مولفه گرادیان  $\frac{1}{2} \partial J / \partial C_0 k$  و  $k = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K$  است، در این نقطه محاسبه شده و وزن هر کدام از شیرها<sup>2</sup> در جهت مخالف مولفه گرادیان مربوطه تغییر می کند. تغییر در وزن شیر  $j$  ام متناسب است با اندازه مولفه گرادیان  $j$ ام. بنابراین مقادیر بعدی بردار ضرایب  $C$  از رابطه زیر بدست می آیند.

$$C_{k+1} = C_k - \Delta G_k \text{ و } k = 0, 1, 2, \dots \quad (2-7)$$

که در آن بردار گرادیان  $G_k$  برابر است با

$$G_k = 1/2 (dj/dC_k) = \Gamma C_k - \xi = -E(\epsilon_k v_k^*) \quad (2-8)$$

بردار  $C_k$  بیانگر مجموعه ضرایب در  $k$  امین تکرار،  $\epsilon_k = I_k - \hat{I}_k$  سیگنال خطا در  $k$  امین تکرار،  $v_k$  بردار نمونه های سیگنال دریافتی است که تخمین  $\hat{I}_k$  را شکل می دهد  $v_k = [v_{k+K} \dots v_k \dots v_{k-K}]^T$  و  $\Delta$  عدد مثبتی است که به اندازه کافی کوچک انتخاب می شود تا همگرایی فرایند را تضمین نماید. اگر برای مقداری از  $k$  مثل  $k = k_0$  به حداقل MSE دست یافتیم در این صورت  $G_k = 0$  شده و هیچ گونه تغییر دیگری در وزن شیرها داده نمی شود. در حالت کلی و برای  $k_0$  محدود نمی توان با استفاده از روش سریع ترین فرود به  $J_{min}(k)$  دست یافت، اما می توان تا حد دلخواه به آن نزدیک شد.

مشکل اصلی روش سریع ترین فرود برای تعیین وزن بهینه شیرها، عدم اطلاع از بردار گرادیان  $G_k$  است که به ماتریس کوواریانس  $\Gamma$  و بردار همبستگی متقابل  $\xi$  هر دو بستگی دارد. این کمیت ها به نوبه خود به ضرایب مدل کانال معادل گسسته زمان  $\{f_k\}$  و کوواریانس دنباله اطلاعات و نویز جمعی بستگی دارند که در حالت کلی همه آنها برای گیرنده ناشناخته اند. برای غلبه بر این مشکل می توان از تخمین بردار گرادیان استفاده نمود. یعنی اینکه الگوریتم تنظیم ضرایب وزنی شیرها را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\hat{C}_{k+1} = \hat{C}_k - \Delta \hat{G}_k \quad (2-9)$$

که در آن  $\hat{G}_k$  بیانگر تخمین بردار گرادیان  $G_k$  و  $\hat{C}_k$  بیانگر تخمین بردار ضرایب است.

<sup>1</sup> Steepest Descent

<sup>2</sup> Taps

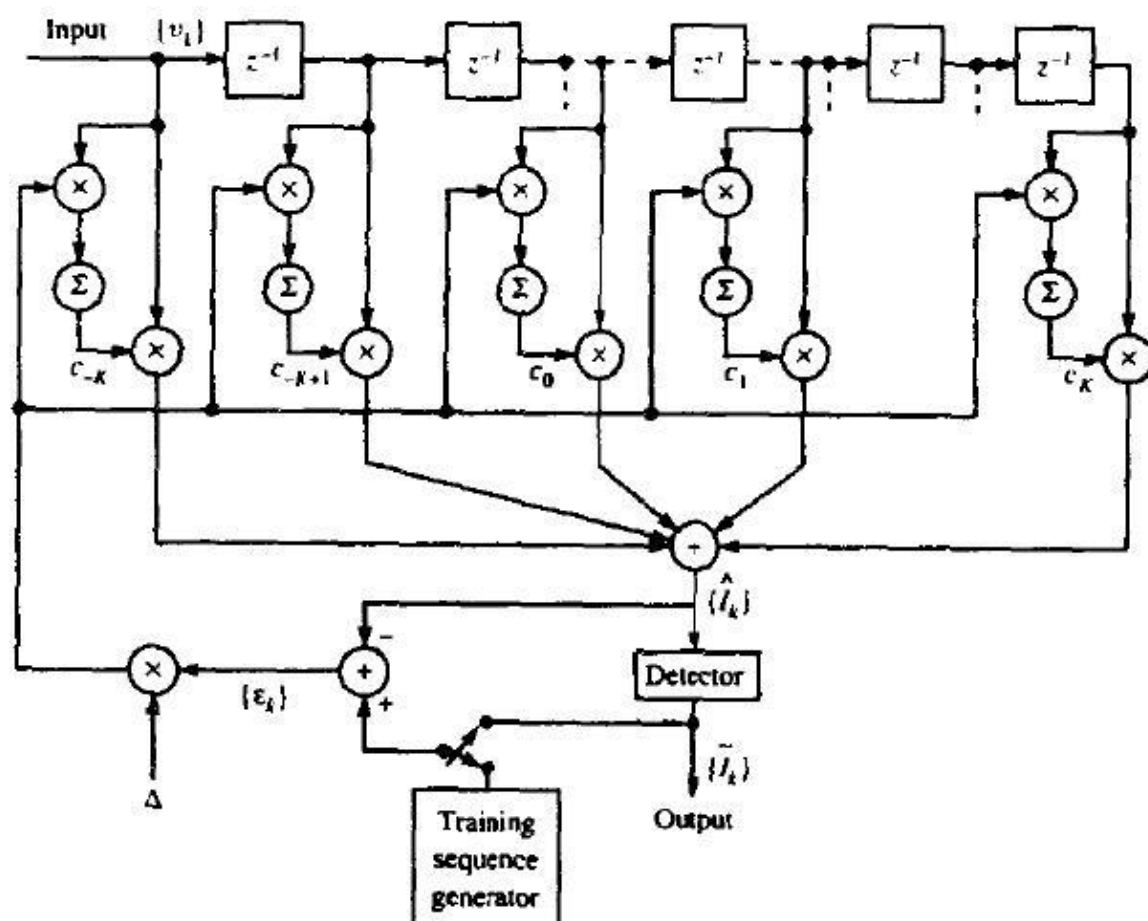
از رابطه (۲-۸) توجه دارید که  $G_k$  برابر است با منفی امید ریاضی  $\epsilon_k v_k^*$  در نتیجه تخمین  $G_k$  برابر است با

$$\hat{G}_k = - \epsilon_k v_k^* \quad (2-10)$$

از آنجائی که  $E(\hat{G}_k) = G_k$  تخمین  $\hat{G}_k$  یک تخمین بایاس نشده از بردار گرادیان واقعی  $G_k$  است، استفاده از رابطه ی (۲-۱۰) در رابطه ی (۲-۹) الگوریتم زیر را به دست می دهد.

$$\hat{C}_{k+1} = \hat{C}_k + \Delta \epsilon_k v_k^* \quad (2-11)$$

این الگوریتم همان گونه که توسط ویدور (۱۹۶۶) تشریح شده الگوریتم پایه حداقل متوسط مجذور (LMS) برای تنظیم بازگشتی ضرایب وزنی شیرهای همسان ساز است و در همسان ساز شکل ۲-۲ نمایش داده شده است.



شکل ۲-۲ متعادل ساز فوقی خطی مبتنی بر معیار MSE

الگوریتم پایه داده شده در رابطه ی (۲-۱۱) و انواع تغییر یافته ای از آن در همسان سازهای فوقی تجاری مورد استفاده در مودم های سرعت بالا به کار گرفته شده است. سه نوع تغییر یافته الگوریتم



پایه را می توان با استفاده از اطلاعات موجود در علامت سیگنال خطا  $\epsilon_k$  و/یا در مولفه های  $v_k$  به دست آورد. این سه نوع الگوریتم تغییر یافته عبارتند از

$$C_{(k+1)j} = C_{kj} + \Delta \text{csgn}(\epsilon_k) v_{k-j}^*, \quad j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (2-12)$$

$$C_{(k+1)j} = C_{kj} + \Delta \epsilon_k \text{csgn}(v_{k-j}^*) \quad j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (2-13)$$

$$C_{(k+1)j} = C_{kj} + \Delta \text{csgn}(\epsilon_k) \text{csgn}(v_{k-j}^*) \quad j = -K, \dots, -1, 0, 1, \dots, K \quad (2-14)$$

که در آنها  $\text{csgn}(x)$  به صورت زیر تعریف می شود

$$\text{csgn}(x) = \begin{cases} 1 + j & [\text{Re}(x) > 0, \text{Im}(x) > 0] \\ 1 - j & [\text{Re}(x) > 0, \text{Im}(x) < 0] \\ -1 + j & [\text{Re}(x) < 0, \text{Im}(x) > 0] \\ -1 - j & [\text{Re}(x) < 0, \text{Im}(x) < 0] \end{cases} \quad (2-15)$$

واضح است که الگوریتم داده شده در رابطه (۲-۱۴) از نظر پیاده سازی ساده ترین است، ولی در مقایسه با سایر انواع کندترین نرخ همگرایی را دارد.

انواع مختلف دیگری از الگوریتم LMS با متوسط گیری و یا فیلتر کردن بردارهای گرادیان روی چندین تکرار و قبل از اقدام به تنظیم ضرایب همسان ساز به دست می آید. به عنوان مثال متوسط روی  $N$  بردار گرادیان عبارت است از

$$\bar{G}_{mN} = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon_{mN+n} v_{mN+n}^* \quad (2-16)$$

و رابطه بازگشتی برای به هنگام نمودن ضرایب همسان ساز بعد از هر  $N$  تکرار عبارت است از

$$\hat{C}_{(k+1)N} = \hat{C}_{kN} - \Delta \bar{G}_{kN} \quad (2-17)$$

در واقع همان گونه که توسط گاردنر (۱۹۸۴) نشان داده شده، عملیات متوسط گیری انجام شده در رابطه (۲-۱۶) میزان نویز را در تخمین بردار گرادیان کاهش می دهد.

شیوه دیگر عبارت است از فیلتر نمودن بردارهای گرادیان نویزی توسط یک فیلتر پایین گذر و استفاده از خروجی آن به عنوان تخمین بردار گرادیان. به عنوان مثال استفاده از یک فیلتر پایین گذر ساده برای گرادیان های نویزی، خروجی زیر را به دست می دهد

$$w\bar{G}_{k-1} + (1-w)\hat{G}_k, \quad \bar{G}(0) = \hat{G}(0) \quad (2-18)$$

که در آن انتخاب  $0 \leq w < 1$  تعیین کننده پهنای باند فیلتر پایین گذر است. وقتی  $w$  نزدیک یک است پهنای باند فیلتر کوچک و میانگین گیری مؤثر روی تعداد زیادی بردارهای گرادیان انجام می شود. از طرف دیگر وقتی  $w$  کوچک است فیلتر پایین گذر دارای پهنای باند بزرگی بوده و در نتیجه میانگین گیری اندکی روی بردارهای گرادیان انجام می شود. در صورتی که به جای  $G_k$  از بردارهای گرادیان

فیلتر شده در رابطه (۲-۱۷) استفاده شود، الگوریتم LMS گرادیان فیلتر شده بر طبق رابطه زیر به دست می آید.

$$\hat{C}_{(k+1)} = \hat{C}_k - \Delta \bar{G}_k \quad (2-19)$$

در بحث قبلی فرض شد که گیرنده برای تشکیل سیگنال خطا بین سمبل مطلوب و تخمین آن از دنباله سمبل های ارسالی مطلع است. این آگاهی را می توان در طول یک دوره ی کوتاه آموزشی و با ارسال یک دنباله ی اطلاعات شناخته شده برای تنظیم اولیه وزن شیرها برای گیرنده فراهم نمود. طول این دنباله بایستی حداقل به اندازه ی طول همسان ساز باشد، به طوری که طیف سیگنال ارسالی پهنای باند کانال مورد نظر را به طور مناسب پوشش دهد.

در عمل اغلب دنباله آموزشی یک دنباله شبه تصادفی تناوبی نظیر دنباله یک ثبات انتقالی<sup>۱</sup> با حداکثر طول بوده و به گونه ای انتخاب می شود که دوره تناوب آن N برابر طول همسان ساز باشد ( $N=2k+1$ ). در این مورد معمولاً گرادیان روی طول دنباله میانگین گیری شده و تنظیم ضرایب در هر یک پریود یک بار انجام می شود. این شیوه را همسان سازی دوری<sup>۲</sup> گویند و در مقالات مولر و سپولدینگ (۱۹۷۵) و قرشی (۱۹۷۷ و ۱۹۸۵) بررسی شده است. یک روش عملی برای تنظیم پیوسته وزن شیرها می تواند استفاده از مد عملکرد مبتنی بر تصمیم باشد که فرض می شود تصمیمات اتخاذ شده در مورد سمبل های اطلاعات صحیح بوده و برای تشکیل سیگنال خطای  $\epsilon_k$  به جای  $I_k$  از آنها استفاده شود. روش دیگر استفاده از یک دنباله کاوشگر<sup>۳</sup> شبه تصادفی شناخته شده است که به سیگنال ناقل اطلاعات اضافه شده و یا با آن درهم نهی زمانی شده و در طرف گیرنده از مقایسه سمبل های کاوشگر دریافتی با سمبل های کاوشگر ارسالی برای تنظیم ضرایب شیرها استفاده می شود. در مد عملکرد مبتنی بر تصمیم سیگنال خطا به صورت  $\epsilon_k = \tilde{I}_k - \hat{I}_k$  در می آید که در آن  $\tilde{I}_k$  تصمیم گیرنده بر مبنای تخمین  $\hat{I}_k$  است. تا زمانی که گیرنده با نرخ خطای پایین کار می کند تاثیر خطاهای گاه و بیگاه بر همگرایی الگوریتم قابل صرف نظر کردن است.

اگر پاسخ کانال تغییر کند این امر موجب تغییر ضرایب مدل کانال معادل گسسته زمان  $\{f_k\}$  می-شود. از آنجائی که سیگنال خطا به  $\{f_k\}$  بستگی دارد، در این سیگنال نیز منعکس خواهد شد. لذا وزن شیرها بر طبق رابطه (۲-۱۱) تغییر کرده تا منعکس کننده تغییر در کانال باشد. اگر آمارگان نویز یا دنباله اطلاعات تغییر کند، تغییر مشابهی در وزن شیرها ایجاد می شود. بنابراین همسان ساز وفقی است.

<sup>1</sup> Shift Register

<sup>2</sup> Cyclic Equalization

<sup>3</sup> Probe Sequence

## ۲-۲ همسان ساز پس خور تصمیم وفقی

برای تنظیم ضرایب فیلترهای پیش خور و پسخور یک همسان ساز با پس خور تصمیم (DFE) می توان به جای معکوس نمودن ماتریس این کار را همانند مورد همسان ساز خطی وفقی به صورت بازگشتی انجام داد. بر مبنای حداقل ساختن MSE در خروجی DFE، الگوریتم سریع ترین فرود به صورت زیر در می آید

$$C_{k+1} = C_k + \Delta E(\epsilon_k v_k^*) \quad (2-20)$$

که در آن  $C_k$  برابر ضرایب همسان ساز در بازه زمانی سیگنال  $k$  ام،  $E(\epsilon_k v_k^*)$  همبستگی متقابل سیگنال خطا و  $v_k = [v_{k+K1}, \dots, v_k I_{k-1}, \dots, I_{k-K2}]^T$  بیانگر مقادیر سیگنال در فیلترهای پیش خور و پس خور در زمان  $t=KT$  می باشد. متوسط مجذور خطا در صورتی حداقل خواهد شد که وقتی  $k \rightarrow \infty$ ، بردار همبستگی متقابل  $E(\epsilon_k v_k^*) = 0$  باشد. از آنجائی که مقدار دقیق بردار همبستگی متقابل در هیچ لحظه زمانی شناخته شده نیست از تخمین بردار  $\epsilon_k v_k^*$  استفاده نموده و نویز موجود در تخمین را توسط رابطه بازگشتی زیر میانگین گیری می-کنیم.

$$\hat{C}_{(k+1)} = \hat{C}_k - \Delta \epsilon_k v_k^* \quad (2-21)$$

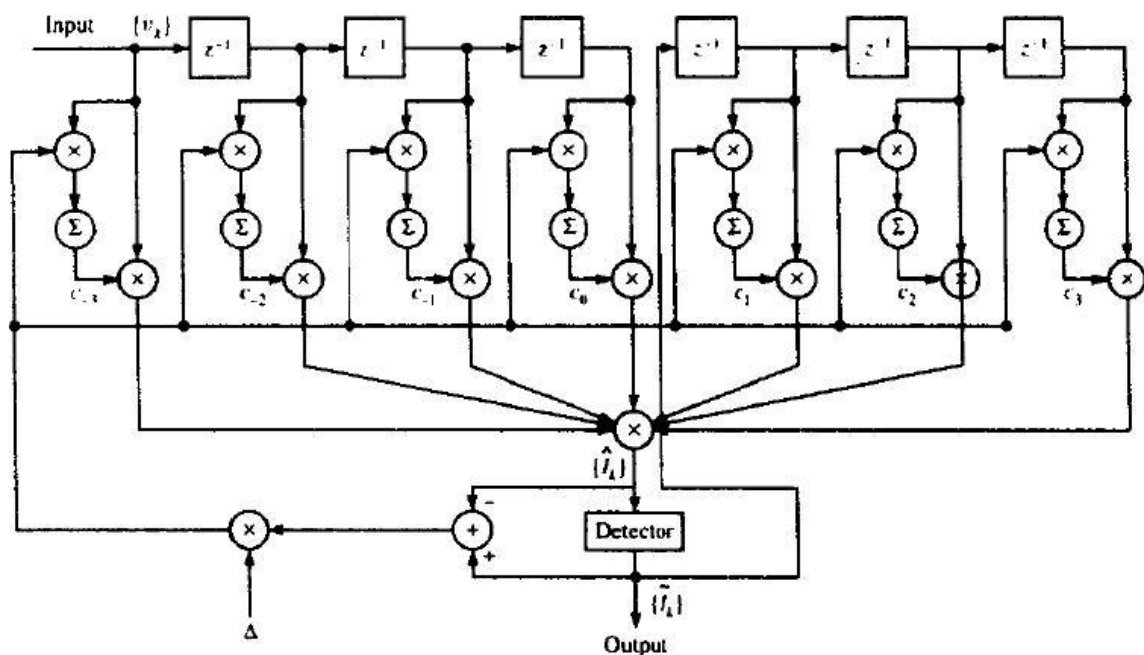
این الگوریتم LMS برای همسان ساز پس خور تصمیم است.

همانند مورد همسان ساز خطی، برای تنظیم اولیه ضرایب DFE می توان از یک دنباله آموزشی استفاده کرد. با همگرا شدن (نزدیک شدن) به ضرایب بهینه (حداقل SEM) همسان ساز به مد مبتنی بر تصمیم تغییر وضعیت داده و از تصمیمات خروجی آشکار ساز برای تشکیل سیگنال خطا  $\epsilon_k$  و اعمال آن به فیلتر پس خور استفاده می کند. این همان مد وفقی کار همسان ساز با پس خور تصمیم است که در شکل ۲-۳ نشان داده شده است. در این حالت رابطه بازگشتی برای تنظیم ضرایب همسان ساز عبارت است از

$$\hat{C}_{(k+1)} = \hat{C}_k - \Delta \tilde{\epsilon}_k v_k^* \quad (2-22)$$

که در آن  $\tilde{\epsilon}_k = \tilde{I}_k - \hat{I}_k$  و  $v_k = v_{k+K1} \dots v_k \tilde{I}_{k-K2} \dots \tilde{I}_{k-K2}$ .

مشخصات عملکردی الگوریتم LMS برای تنظیم DFE اساساً همانند چیزی است که برای همسان ساز خطی وفقی ارائه شد.



شکل ۲-۳ همسان ساز پس خور تصمیم

## ۲-۳ الگوریتم های کمترین مربعات بازگشتی (RLS) برای همسان سازی افقی

الگوریتم LMS برای تنظیم ضرایب همسان ساز خطی و یا DFE که در بخش های ۱-۲ و ۲-۲ تشریح شد، اساساً یک الگوریتم سریع ترین فرود (آماری) است که در آن بردار گرادینان واقعی با تخمینی که مستقیماً از روی داده ها به دست می آید تقریب زده می شود.

عمده ترین مزیت الگوریتم سریع ترین فرود سادگی محاسباتی آن است. بهای پرداختی بابت این سادگی همگرایی کند آن است. خصوصاً هنگامی که مقادیر ویژه ماتریس خود همبستگی  $\Gamma$  کانال دارای پراکندگی زیاد باشد، یعنی  $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} \gg 1$ . از دیدگاه دیگر، الگوریتم گرادینان برای کنترل نرخ همگرایی فقط یک پارامتر قابل تنظیم یعنی  $\Delta$  را دارد. در نتیجه همگرایی کند آن ناشی از این محدودیت اساسی است.

برای دستیابی به همگرایی سریع تر لازم است الگوریتم های پیچیده تری با پارامترهای بیشتر ابداع شود. مشخصاً اگر ماتریس  $\Gamma$  از نوع  $N \times N$  و دارای مقادیر ویژه  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  باشد می-توان از الگوریتمی شامل  $N$  پارامتر، هر یک برای هر کدام از مقادیر ویژه، استفاده نمود. چگونگی انتخاب بهینه این پارامترها برای حصول به همگرایی سریع موضوع بحث این بخش است.

برای به دست آوردن الگوریتم هایی با سرعت همگرایی بیشتر بایستی از شیوه کمترین مربعات استفاده نمود لذا برای حداقل نمودن توان دوم شاخص عملکرد بایستی مستقیماً با داده دریافتی سرو کار داشت.

در حالی که پیش از این متوسط مجذور خطا را حداقل کردیم. به بیان ساده این بدان معنی است که شاخص عملکرد به جای متوسط آماری بر حسب متوسط زمانی بیان شده است.

نمایش الگوریتم های کمترین مربعات بازگشتی به صورت ماتریسی مناسب است. لذا بایستی تعدادی بردار و ماتریس مورد نیاز برای این منظور را تعریف کنیم. برای این منظور علامت گذاری را اندکی تغییر می دهیم. به طور مشخص تخمین سمبل اطلاعات توسط یک همسان ساز خطی را در زمان  $t$  که یک عدد صحیح است، به صورت زیر نمایش می دهیم

$$\hat{I}(t) = \sum_{j=-K}^K c_j(t-1)v_{t-j} \quad (2-23)$$

با تعویض محدوده تغییرات شاخص  $j$  در  $c_j(t-1)$  از  $j=0$  تا  $j=N-1$  و همزمان تعریف

$$y(t) = v_t + k \quad (2-24)$$

تخمین  $\hat{I}(t)$  به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} \hat{I}(t) &= \sum_{j=0}^{N-1} c_j(t-1)y(t-j) \\ &= C_N^t(t-1)Y_N(t) \end{aligned} \quad (2-25)$$

که در آن  $C_N^t(t-1)$  و  $Y_N(t)$  به ترتیب بردارهای ستون ضرایب همسان ساز  $c_j(t-1)$ ،  $j=0,1,\dots,N-1$  و سیگنال های ورودی  $y(t-j)$ ،  $j=0,1,\dots,N-1$  هستند.

به طریق مشابه در همسان ساز پسخور تصمیم ضرایب شیرها  $c_j(t)$ ،  $j=0,1,\dots,N-1$  را داریم که  $k_1+1$  ضریب اول مربوط به فیلتر پیش خور و  $K_2 = N-k_1 - 1$  ضریب دیگر مربوط به فیلتر پس خور هستند. داده در تخمین  $\hat{I}(t)$  عبارت است از  $\tilde{I}_{t-K_2}, \dots, \tilde{I}_{t-1}, v_{t+1}, \dots, v_{t+K_1}$  که در آن  $\tilde{I}_{t-j}$  و  $1 \leq j \leq K_2$  بیانگر تصمیمات اتخاذ شده قبلی است. در این بحث از اثر خطاهای تصمیم گیری بر الگوریتم صفر اجباری صرف نظر می کنیم. لذا فرض می کنیم که  $\tilde{I}_{t-j} = I_{t-j}$ . برای تسهیل در علامت گذاری تعریف زیر را نیز اضافه می کنیم:

$$y(t-j) = \begin{cases} v_{t+K_1-j} & (0 \leq j \leq K_1) \\ I_{t+K_1-j} & (K_1 < j \leq N-1) \end{cases} \quad (2-26)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Y_N(t) &= [y(t) \ y(t-1) \dots y(t-N+1)]^T \\ &= [v_{t+K_1} \dots v_{t+1} v_t I_{t-1} \dots I_{t-K_2}]^T \end{aligned} \quad (2-27)$$

## ۲-۳-۱ الگوریتم کمترین مربعات بازگشتی (کالمن)<sup>۱</sup>

تخمین کمترین مربعات بازگشتی<sup>۲</sup> (RLS) از  $\hat{I}(t)$  را می توان به شرح زیر فرمول بندی کرد. فرض کنید که بردار  $Y_N(t), n=0,1,\dots,t$  را مشاهده کرده و می خواهیم بردار ضرایب همسان ساز (خطی یا پس خور تصمیم)  $C_N(t)$  را که متوسط زمانی مجذور خطای وزن داده شده به شرح زیر را حداقل می کند، تعیین نماییم

$$\varepsilon_N^{LS} = \sum_{n=0}^t w^{t-n} |e_N(n, t)|^2 \quad (2-28)$$

در رابطه فوق خطا اینگونه تعریف می شود

$$e_N(n, t) = I_n - C_N^t(t) Y_N(n) \quad (2-29)$$

و  $w$  بیانگر یک ضریب وزنی است  $0 < w < 1$ . وزن اعمال شده به داده زمان گسسته نمایی انتخاب شده و برای یک کانال دارای مشخصات متغیر با زمان مناسب است. حداقل ساختن  $\varepsilon_N^{LS}$  نسبت به بردار ضرایب  $C_N(t)$  مجموعه خطی زیر را به دست می دهد.

$$R_N(t) C_N = D_N(t) \quad (2-30)$$

که در آن  $R_N(t)$  ماتریس همبستگی سیگنال، تعریف شده به صورت زیر است

$$R_N(t) = \sum_{n=0}^t w^{t-n} Y_n^* Y_N^t(n) \quad (2-31)$$

و  $D_N(t)$  بردار همبستگی متقابل است

$$D_N(t) = \sum_{n=0}^t w^{t-n} Y_N^*(n) I(n) \quad (2-32)$$

حل معادله (۲-۳۰) عبارت است از

$$C_N(t) = R_N^{-1}(t) D(t) \quad (2-33)$$

ماتریس  $R_N(t)$  همانند ماتریس خودهمبستگی آماری  $\Gamma$  است در حالی که بردار  $D_N(t)$  همانند بردار همبستگی متقابل تعریف شده در قبل است. همچنین بایستی تأکید نماییم که برای مقادیر کوچک  $t$ ، ممکن است  $R_N(t)$  دارای شرایط بیمار گونه باشد؛ لذا معمول است که در ابتدا ماتریس  $\delta I_N$  را که در

<sup>1</sup> Kalman

<sup>2</sup> Recursive Least Square

آن  $\delta$  یک ثابت مثبت کوچک و  $I_N$  یک ماتریس یکه است به  $R_N(t)$  اضافه می کنند. با وزن دهی نمایی گذشته اثر افزودن  $\delta I_N$  با زمان از بین می رود.

حال فرض کنید که حل (۲-۳۳) برای زمان  $t-1$  یعنی  $C_N(t-1)$  را داشته و می خواهیم  $C_N(t)$  را محاسبه کنیم. حل مجموعه  $N$  معادله خطی برای هر مؤلفه جدید سیگنال دریافتی کاری غیرموثر و لذا غیرعملی است. برای اجتناب از این کار به شرح زیر عمل می کنیم. ابتدا می توان  $R_N(t)$  را به صورت بازگشتی به شرح زیر محاسبه نمود.

$$R_N(t) = wR_N(t-1) + Y_N^*(t)Y_N^t(t) \quad (2-34)$$

رابطه (۲-۳۴) را معادله به هنگام سازی زمانی<sup>۱</sup>  $R_N(t)$  می نامیم.

چون در رابطه (۲-۳۳) به معکوس  $R_N(t)$  نیاز داریم از تساوی زیر برای معکوس ماتریس استفاده می کنیم.

$$R_N^{-1}(t) = \frac{1}{w} [R_N^{-1}(t-1) - \frac{R_N^{-1}(t-1)Y_N^*(t)Y_N^t(t)R_N^{-1}(t-1)}{w + Y_N^*(t)R_N^{-1}(t-1)Y_N^t(t)}] \quad (2-35)$$

بنابراین  $R_N^{-1}(t)$  را می توان به صورت بازگشتی بر طبق رابطه (۲-۳۵) محاسبه نمود.

برای سهولت تعریف می کنیم  $P_N(t) = R_N^{-1}$ . تعریف یک بردار  $N$  بعدی به نام بردار بهره کالمن<sup>۲</sup> به صورت زیر نیز مناسب است.

$$K_N(t) = \frac{1}{w + \mu_N(t)} P_N(t-1)Y_N^*(t) \quad (2-36)$$

که  $\mu_N(t)$  یک اسکالر تعریف شده به صورت زیر است

$$\mu_N(t) = Y_N^t(t)P_N(t-1)Y_N^*(t) \quad (2-37)$$

با این تعاریف معادله (۲-۳۵) به این صورت در می آید

$$P_N(t) = 1/w [P_N(t-1) - K_N(t)Y_N^t(t)P_N(t-1)] \quad (2-38)$$

<sup>1</sup> Time Update Equation

<sup>2</sup> Kalman Gain Vector

فرض کنید که طرفین رابطه (۲-۳۸) را در  $Y_N^*(t)$  پس ضرب<sup>۱</sup> کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned} P_N(t)Y_N^*(t) &= 1/w[P_N(t-1)Y_N^*(t) - K_N(t)Y_N^t(t)P_N(t-1)Y_N^*(t)] \\ &= 1/w\{[w+\mu_N(t)]K_N(t) - K_N(t)\mu_N(t)\} \\ &= K_N(t) \end{aligned} \quad (2-39)$$

بنابراین بردار بهره کالمن را می توان به صورت  $P_N(t) Y_N(t)$  نیز تعریف کرد.

حال برای به دست آوردن رابطه ای جهت تعیین  $C_N(t)$  از روی  $C_N(t-1)$  از تساوی معکوس ماتریس استفاده می کنیم. از آنجا که

$$C_N(t) = P_N(t)D_N(t)$$

و

$$D_N(t) = wD_N(t-1) + I(t)Y_N^*(t) \quad (2-40)$$

داریم

$$\begin{aligned} C_N(t) &= 1/w[ P_N(t-1) - K_N(t)Y_N^t(t)P_N(t-1)][wD_N(t-1) + I(t)Y_N^*(t)] \\ &= P_N(t-1) - D_N(t-1) + 1/w I(t) P_N(t-1)Y_N^*(t) \\ &\quad - K_N(t)Y_N^t(t)P_N(t-1)D_N(t-1) \\ &\quad - 1/w I(t)K_N(t)Y_N^t(t)P_N(t-1) Y_N^*(t) \\ &= C_N(t-1) + K_N(t)[I(t) - Y_N^t(t)C_N(t-1)] \end{aligned} \quad (2-41)$$

توجه کنید که  $Y_N^t(t)C_N(t-1)$  برابر است با خروجی همسان ساز در زمان  $t$  یعنی

$$\hat{I}(t) = Y_N^t(t)C_N(t-1) \quad (2-42)$$

$$e_N(t, t-1) = I(t) - \hat{I}(t) \quad (2-43)$$

---

<sup>1</sup> Post Multiply



برابر است با خطای بین سبمل مورد نظر و تخمین آن. لذا  $C_N(t)$  به صورت بازگشتی و بر طبق رابطه زیر به هنگام می شود

$$C_N(t) = C_N(t-1) + K_N(t)e_N(t) \quad (2-44)$$

متوسط مجذور خطای باقی مانده حاصل از این بهینه سازی برابر است با

$$\varepsilon_{N_{min}}^{LS} = \sum_{m=0}^t w^{t-n} |I(n)|^2 - C_N^t(t) D_N^*(t) \quad (2-45)$$

به طور خلاصه فرض کنید که  $C_N(t-1)$  و  $P_N(t-1)$  را داریم. وقتی یک مؤلفه جدید سیگنال دریافت شود،  $Y_N(t)$  را داریم. در این صورت محاسبه معادله بازگشتی برای به هنگام سازی زمانی  $P_N(t)$  و  $C_N(t)$  به شرح زیر ادامه می یابد

$$\hat{I}(t) = Y_N^t(t) C_N(t-1)$$

$$e_N(t, t-1) = I(t) - \hat{I}(t)$$

$$K_N(t) = \frac{Y_N^t(t) P_N(t-1)}{w + Y_N^t(t) P_N(t-1) Y_N^*(t)}$$

$$P_N(t) = 1/w [P_N(t-1) - K_N(t) Y_N^t(t) P_N(t-1)]$$

$$C_N(t) = C_N(t-1) + K_N(t) e_N(t) \quad (2-47)$$

الگوریتم تشریح شده توسط رابطه فوق را صورت مستقیم RLS یا الگوریتم کالمن گویند.

## ۲-۴ همسان سازی خودبازياب<sup>۱</sup> (کور)<sup>۲</sup>

در همسان سازیهای معمولی صفر اجباری و یا حداقل متوسط مجذور خطا فرض کردیم که برای تنظیم اولیه ضرایب همسان ساز یک دنباله آموزشی شناخته شده توسط فرستنده برای گیرنده ارسال می گردد. اما در بعضی کاربردها مانند شبکه های مخابراتی چند نقطه ای مطلوب آن است که گیرنده بدون وجود یک دنباله آموزشی خود را با سیگنال دریافتی همزمان نموده و ضرایب همسان ساز را تنظیم نماید. روشهای همسان سازی مبتنی بر تنظیم اولیه ضرایب بدون استفاده از دنباله ی آموزشی را خودبازياب یا کور می نامند.

<sup>1</sup> Self Recovering

<sup>2</sup> Blind

با شروع از مقاله ساتو<sup>۱</sup> (۱۹۷۵) در دو دهه گذشته سه گروه مختلف از الگوریتمهای همسان سازی کور توسعه یافته اند. یک گروه از الگوریتم ها برای تنظیم همسان ساز از روش سریعترین فرود استفاده می کنند. گروه دوم برای تخمین مشخصات کانال و طراحی همسان ساز از آمارگان مرتبه دوم و مراتب بالاتر (معمولاً مرتبه چهارم) سیگنال دریافتی استفاده می کنند. اخیراً گروه سوم از الگوریتم های همسان سازی کور مبتنی بر معیار حداکثر تشابه مورد بررسی قرار گرفته- اند. در این بخش این شیوه ها را به طور خلاصه شرح می دهیم.

## ۲-۴-۱ همسان سازی کور مبتنی بر معیار حداکثر تشابه

مناسب است که از مدل معادل کانال زمان گسسته استفاده کنیم. یادآوری می نماید که خروجی این مدل کانال دارای تداخل بین سمبلی عبارت است از

$$v_n = \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k} + \eta_n \quad (2-47)$$

که در آن  $\{f_k\}$  ضرایب کانال معادل زمان گسسته،  $\{I_k\}$  بیانگر دنباله اطلاعات و  $\{\eta_n\}$  دنباله نویز گوسی سفید است.

برای بلوک داده دریافتی  $N$  نقطه ای، تابع چگالی احتمال (مشترک) بردار داده دریافتی  $v = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_N]^T$  به شرط اطلاع از بردار پاسخ ضربه  $f = [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_L]^T$  و بردار داده  $I = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_N]^T$  عبارت است از

$$p(v|f, I) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^N} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N |v_n - \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k}|^2 \right) \quad (2-48)$$

تخمین های مشترک حداکثر تشابه  $I, f$  مقادیری از این بردارها هستند که تابع چگالی احتمال مشترک  $p(v|f, I)$  را حداکثر و یا جمله موجود در نمای آن را حداقل نمایند. لذا حل ML از حداقل نمودن عبارت زیر روی  $I, f$  به دست می آید

$$DM(I, f) = \sum_{n=1}^N |v_n - \sum_{k=0}^L f_k I_{n-k}|^2 = \|v - Af\|^2 \quad (2-49)$$

که در آن ماتریس  $A$  را ماتریس داده گویند و به صورت زیر تعریف می شود

<sup>1</sup> Sato

$$A = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ I_2 & I_1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ & & & \ddots & \\ I_N & I_{N-1} & I_{N-2} & \dots & I_{N-L} \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

نکات زیر قابل ملاحظه است. قبل از هر چیز توجه داریم که وقتی بردار داده  $I$  (یا ماتریس داده  $A$ ) شناخته شده است، نظیر حالتی که یک دنباله آموزشی درگیرنده موجود است، تخمین  $ML$  پاسخ ضربه کانال که از حداقل ساختن رابطه (۲-۴۹) روی  $f$  به دست می آید برابر است با

$$f_{ML}(I) = (A^H A)^{-1} A^H v \quad (2-51)$$

از طرف دیگر وقتی پاسخ ضربه کانال  $f$  شناخته شده است، آشکار ساز حداکثر تشابه بهینه برای تعیین دنباله داده  $I$  با استفاده از الگوریتم ویتربی ترلیس (و یا درخت) کانال داری  $ISI$  را جستجو می-کند.

وقتی نه  $f$  و نه  $I$  هیچ کدام شناخته شده نیستند حداقل سازی معیار عملکرد  $DM(I, f)$  را می توان مشترکاً روی  $f, I$  انجام داد. به عبارت دیگر  $f$  را می توان از تابع چگالی احتمالی  $p(v/f)$  که خود از میانگین گیری  $p(v|f, I)$  روی تمام دنباله های داده ممکن به دست می آید، تخمین زد. یعنی

$$p(v|f) = \sum_m p(v|I^{(m)}, f) P(I^{(m)}) \quad (2-52)$$

که در آن  $P(I^{(m)})$  احتمال دنباله  $I=I^{(m)}$  برای  $m=1, 2, \dots, M^N$  و  $M$  اندازه منظومه سیگنال است.

## ۲-۴-۲ الگوریتم گرادیان آماری

گروه دیگری از الگوریتم های همسان سازی کور، روشهای همسان سازی گرادیان آماری تکراری هستند که به منظور تولید پاسخ مطلوب در هر تکرار، یک غیر خطی بی حافظه به خروجی فیلتر همسان ساز  $FIR$  خطی اعمال می نمایند.

کار را با حدس اولیه ضرایب همسان ساز بهینه که آن را با  $\{c_n\}$  نشان می دهیم آغاز می کنیم. سپس کانولوشن پاسخ کانال با پاسخ همسان ساز را می توان به صورت زیر نمایش داد

$$\{c_n\} * \{f_n\} = \{\delta_n\} + \{e_n\} \quad (2-53)$$

که در آن  $\{\delta_n\}$  دنباله نمونه های واحد و  $\{e_n\}$  بیانگر دنباله خطای ناشی از حدس اولیه ضرایب همسان ساز است. اگر پاسخ ضربه همسان ساز را با دنباله دریافتی  $\{v_n\}$  کانالو کنیم خواهیم داشت

$$\{\hat{I}_n\} = \{v_n\} * \{c_n\} \quad (2-54)$$

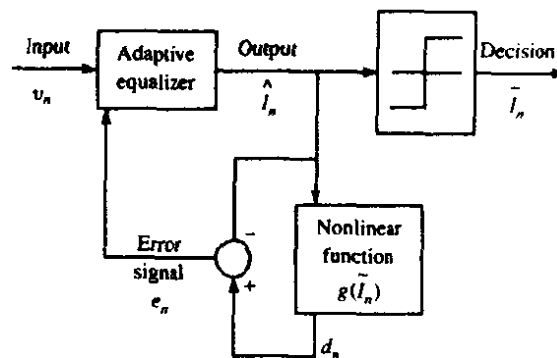
$$= \{I_n\} * \{f_n\} * \{c_n\} + \{\eta_n\} * \{c_n\}$$

$$= \{I_n\} * (\{\delta_n\} + \{e_n\}) + \{\eta_n\} * \{c_n\}$$

$$= \{I_n\} + \{I_n\} * \{e_n\} + \{\eta_n\} * \{c_n\}$$

در رابطه (۲-۵۴) جمله  $\{I_n\}$  بیانگر دنباله داده مورد نظر، جمله  $\{I_n\} * \{e_n\}$  بیانگر تداخل بین سمبلی باقی مانده و جمله  $\{\eta_n\} * \{c_n\}$  بیانگر نویز جمعی است. مسئله ما استفاده از دنباله واکانوالوشده  $\{\hat{I}_n\}$  برای یافتن بهترین تخمین پاسخ مطلوب است که معمولاً با  $\{d_n\}$  نشان داده می شود. در مورد همسان سازی وفقی با استفاده از یک دنباله آموزشی،  $\{d_n\} = \{I_n\}$  است. در مد همسان سازی کور پاسخ مطلوب را بایستی از روی  $\{\hat{I}_n\}$  تولید نماییم.

برای تعیین بهترین تخمین  $\{I_n\}$  از روی مشاهده خروجی همسان ساز  $\{\hat{I}_n\}$  می توان از معیار متوسط مجذور خطا استفاده نمود. از آنجا که دنباله ارسالی  $\{I_n\}$  دارای PDF غیر گوسی است، تخمین متوسط مجذور خطا یک تبدیل غیرخطی از  $\{\hat{I}_n\}$  است. در حالت کلی بهترین تخمین  $\{d_n\}$  سیگنال خطا تولید و مطابق شکل ۲-۴ به فیلتر همسان ساز وفقی پس خورد می شود. تابع غیرخطی مبتنی بر معیار متوسط مجذور خطا را بررسی می کنیم.



شکل ۲-۴ همسان سازی کور وفقی با الگوریتم گرادیان اماری

یک مسئله شناخته شده و کلاسیک تخمین عبارت است از این که اگر خروجی همسان ساز  $\hat{I}_n$  به صورت زیر نمایش داده شود

$$\hat{I}_n = I_n + \tilde{\eta}_n \quad (2-56)$$

که در آن  $\tilde{\eta}_n$  گوسی با متوسط صفر فرض می شود (برای ISI باقی مانده و نویز تجمعی از قضیه حد مرکزی کمک می گیریم)،  $\{I_n\}$  و  $\{\tilde{\eta}_n\}$  از نظر آماری مستقل بوده و  $\{I_n\}$  خود متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع یکسان هستند. در این صورت تخمین متوسط مجذور خطای  $\{I_n\}$  عبارت است از

$$d_n = E(I_n | \hat{I}_n) \quad (2-57)$$

که وقتی  $\{I_n\}$  غیر گوسی است، تابعی غیر خطی از خروجی همسان ساز است.

جدول ۲-۱ نشان دهنده صورت کلی الگوریتمهای همسان سازی کور موجود است که برای تنظیم از معیار LMS استفاده می کنند. ملاحظه می کنیم که تفاوت اساسی آنها در انتخاب غیر خطی بی حافظه است. رایجترین الگوریتم مورد استفاده در عمل، الگوریتم گدارد<sup>۱</sup> است که گاهی الگوریتم با قدر مطلق ثابت<sup>۲</sup> (CMA) نیز گفته می شود.

از جدول ۲-۱ واضح است که دنباله  $\{d_n\}$  حاصل از اعمال تابع غیر خطی به خروجی همسان ساز نقش پاسخ مطلوب یا دنباله آموزشی را بازی می کند. همچنین آشکار است که پیاده سازی این الگوریتم ها ساده است، زیرا اساساً از نوع LMS هستند. به این ترتیب انتظار داریم که خصوصیات همگرایی این الگوریتم ها به ماتریس خود همبستگی داده دریافتی  $\{v_n\}$  بستگی داشته باشد.

از نظر همگرایی، الگوریتم های فوقی از نوع LMS وقتی به مقدار متوسط همگرا می شوند که

$$E[v_n g^*(\hat{I}_n)] = E[v_n \hat{I}_n^*] \quad (2-58)$$

و از دیدگاه متوسط مجذور وقتی که (H بیانگر ترانهاد مزدوج است)

$$E[C_n^H v_n g^*(\hat{I}_n)] = E[C_n^H v_n \hat{I}_n^*], \quad E[\hat{I}_n g^*(\hat{I}_n)] = E[|\hat{I}_n|^2] \quad (2-59)$$

در نتیجه لازم است که خروجی همسان ساز  $\{\hat{I}_n\}$  رابطه (۲-۵۹) را برآورده نماید. توجه کنید که رابطه (۲-۵۹) بیانگر آن است که تابع خود همبستگی  $\{\hat{I}_n\}$  (طرف راست) برابر است با همبستگی متقابل بین  $\hat{I}_n$  و تبدیل غیرخطی  $\hat{I}_n$  (طرف چپ). فرایندهایی که این خصوصیت را برآورده نمایند

<sup>1</sup> Godard

<sup>2</sup> Constant Modules Algorithm

Equalizer tap coefficients	$\{c_n, 0 \leq n \leq N-1\}$
Received signal sequence	$\{v_n\}$
Equalizer output sequence	$\{\hat{I}_n\} = \{v_n\} \star \{c_n\}$
Equalizer error sequence	$\{e_n\} = g(\hat{I}_n) - \hat{I}_n$
Tap coefficient update equation	$c_{n+1} = c_n + \Delta v_n^* e_n$

Algorithm	Nonlinearity: $g(\hat{I}_n)$
Godard	$\frac{\hat{I}_n}{ \hat{I}_n } ( \hat{I}_n  + R_2  \hat{I}_n  -  \hat{I}_n ^3), R_2 = \frac{E\{ \hat{I}_n ^4\}}{E\{ \hat{I}_n ^2\}}$
Sato	$\zeta \text{csgn}(\hat{I}_n), \zeta = \frac{E\{[\text{Re}(\hat{I}_n)]^2\}}{E\{ \text{Re}(\hat{I}_n) \}}$
Benveniste-Goursat	$\hat{I}_n + k_1(\hat{I}_n - \bar{I}_n) + k_2 \hat{I}_n - \bar{I}_n  [\zeta \text{csgn}(\hat{I}_n) - \bar{I}_n], k_1 \text{ and } k_2 \text{ are positive constants}$
Stop-and-Go	$\hat{I}_n + \frac{1}{2}A(\hat{I}_n - \bar{I}_n) + \frac{1}{2}B(\hat{I}_n - \bar{I}_n)^*$ ( $A, B$ ) = (2, 0), (1, 1), (1, -1), or (0, 0), depending on the signs of decision-directed error $\hat{I}_n - \bar{I}_n$ and the error $\zeta \text{csgn}(\hat{I}_n) - \bar{I}_n$

از سوی بلینی<sup>۱</sup> (۱۹۸۶)، بوسگانگ<sup>۲</sup> (۱۹۵۲) نامیده شده اند. به طور خلاصه الگوریتم های داده شده در جدول ۲-۱ وقتی همگرا می شوند که دنباله خروجی همسان ساز  $\hat{I}_n$  خصوصیت بوسگانگ را برآورده نماید.

محدودیت اصلی الگوریتم های گرادیان آماری همگرایی نسبتاً آهسته آنهاست. با تغییر الگوریتمهای وفقی از LMS به نوع RLS، می توان نرخ همگرایی را تا اندازه ای بهبود بخشید.

## ۲-۴-۳ الگوریتم های همسان سازی کور مبتنی بر آمارگان مرتبه دوم و بالاتر سیگنال

این مطلب به خوبی شناخته شده است که آمارگان مرتبه دوم (خودهمبستگی) دنباله سیگنال دریافتی، در مورد دامنه مشخصه کانال، اطلاعاتی در اختیار ما می گذارد ولی در مورد فاز آن خیر. ولی در صورت تناوبی بودن تابع خودهمبستگی سیگنال دریافتی، نظیر یک سیگنال مدوله شده دیجیتال این بیان صحیح نیست. در چنین حالتی به دست آوردن اندازه ی دامنه و فاز کانال از سیگنال

<sup>1</sup> Bellini

<sup>2</sup> Bussgang

دریافتی ممکن است. خصوصیت تناوبی و ایستادن بودن سیگنال دریافتی اساس الگوریتم تخمین کانال پیشنهاد شده توسط تانگ<sup>۱</sup> (۱۹۹۴ و ۱۹۹۵) را تشکیل می دهد.

همچنین تخمین پاسخ کانال از روی سینگنال دریافتی با استفاده از روشهای آماری مرتبه بالاتر نیز امکان پذیر است. به طور اخص پاسخ ضربه یک سیستم خطی گسسته و تغییر ناپذیر با زمان را می توان صراحتاً از گشتاورهای مرتبه بالای سیگنال دریافتی به شرط اینکه ورودی آن غیر گوسی باشد به دست آورد. در اینجا روش ساده زیر را که از طرف گیاناکیس<sup>۲</sup> (۱۹۸۷) و گیاناکیس و مندل<sup>۳</sup> (۱۹۸۹) برای تخمین پاسخ ضربه کانال از روی گشتاورهای مرتبه چهارم دنباله سیگنال دریافتی ارائه شد شرح می دهیم. برای سهولت فرض می کنیم که دنباله سیگنال دریافتی حقیقی است. گشتاور مرتبه چهارم به صورت زیر تعریف می شود.

$$C(v_k, v_{k+m}, v_{k+n}, v_{k+l}) = c_r(m, n, t) \quad (2-60)$$

$$\begin{aligned} &= E(v_k v_{k+m} v_{k+n} v_{k+l}) \\ &- E(v_k v_{k+m}) E(v_{k+n} v_{k+l}) \\ &- E(v_k v_{k+n}) E(v_{k+m} v_{k+l}) \\ &- E(v_k v_{k+l}) E(v_{k+m} v_{k+n}) \end{aligned}$$

گشتاور چهارم یک فرایند گوسی صفر است بنابراین نتیجه می گیریم که

$$c_r(m, n, l) = c(I_k, I_{k+m}, I_{k+n}, I_{k+l}) \sum_{k=0}^{\infty} f_k f_{k+m} f_{k+n} f_{k+l} \quad (2-61)$$

برای دنباله ورودی به کانال،  $\{I_n\}$ ، که از نظر آماری مستقل و دارای توزیع یکسان باشد،  $c(I_k, I_{k+m}, I_{k+n}, I_{k+l}) = k$  یک ثابت است که Kurtosis نامیده می شود. پس اگر طول پاسخ کانال  $L+1$  باشد، می توان  $L, n, m$  را به صورت  $m = n = I = -L$  در نظر گرفت به طوری که

$$c_r(-L, -L, -L) = k f_L f_0^3 \quad (2-62)$$

به طریق مشابه اگر بگیریم  $m = 0, n = L, I = p$  داریم

$$c_r(0, L, p) = k f_L f_0^2 f_p \quad (2-63)$$

<sup>1</sup> Tang

<sup>2</sup> Giannakis

<sup>3</sup> Mendel

اگر روابط (۲-۶۲) و (۲-۶۳) را ترکیب کنیم، پاسخ ضربه با اختلاف یک ضریب مقیاس به صورت زیر به دست می آید

$$f_p = f_0 \frac{c_r(0,L,p)}{c_r(-L,-L,-L)}, \quad p = 1, 2, \dots, L \quad (2-64)$$

با تفکیک تخمین کانال از همسان سازی کانال، استفاده از هر نوع همسان ساز، اعم از خطی، پس خورد تصمیم و یا آشکار سازی حداکثر تشابه دنباله برای جبران تداخل بین سمبلی امکان پذیر است. اشکال عمده این گروه از الگوریتمها زیاد بودن میزان داده ها و پیچیدگی محاسباتی ذاتی موجود در تخمین گشتاورهای مرتبه بالاتر سیگنال دریافتی است.

به عنوان جمع بندی، مروری داشتیم بر سه گروه از الگوریتم های همسان سازی کور مورد استفاده در مخابرات دیجیتال. از این سه گروه، الگوریتم های مبتنی بر معیار حداکثر تشابه که پاسخ ضربه کانال و دنباله داده را مشترکاً تخمین می زنند، بهینه بوده و برای انجام تخمین کانال به نمونه های نسبتاً کمی از سیگنال دریافتی نیاز دارند. اما وقتی گستره تداخل بین سمبلی تعداد زیادی سمبل را در برگیرد پیچیدگی محاسباتی آنها زیاد است. در برخی کانال ها نظیر کانال های رادیویی متحرک که گستره تداخل بین سمبلی نسبتاً کوتاه است، پیاده سازی این الگوریتم ها آسان است. در کانال های تلفنی که گستره تداخل بین سمبلی تعداد زیادی سمبل را در برگرفته ولی معمولاً خیلی شدید نیست، عموماً از الگوریتمهای نوع LMS (گرادیان آماری) استفاده می شود.



# بخش سوم: هم‌رشتاین فیلترینگ

در این فصل ابتدا به معرفی سیستم هم‌رشتاین<sup>۱</sup> پرداخته، سپس به ارائه روشی برای تطبیق دادن و به روز کردن ضرائب آن می‌پردازیم. سیستمهای هم‌رشتاین عموماً دسته‌ای از سیستمهای غیرخطی هستند که شامل یک بلوک غیرخطی استاتیک<sup>۲</sup> بوده که به صورت سری با یک سیستم خطی دینامیک<sup>۳</sup> مجموعه فیلتر را تشکیل می‌دهند. در این روش سیستم غیرخطی توسط یک فیلتر چند جمله‌ای<sup>۴</sup> و سیستم خطی توسط یک فیلتر با پاسخ ضربه نامحدود<sup>۵</sup> پیاده‌سازی می‌شوند. فرایند تطبیق دادن المان-های غیرخطی توسط عمودسازی بردار ورودی به ضرائب سیستم چند جمله‌ای صورت می‌گیرد. اساساً در ارائه روشهای فیلترینگ جهت متعادل‌سازی، سعی می‌شود اندازه تغییرات<sup>۶</sup> به گونه‌ای انتخاب شود که پایداری کل سیستم را تضمین کند. پس از ارائه روش پیشنهادی، درباره پایداری آن نیز به تفصیل سخن خواهیم گفت.

---

<sup>1</sup> Hammerstein system

<sup>2</sup> Static Nonlinearity

<sup>3</sup> Linear Dynamics

<sup>4</sup> Polynomial Filter

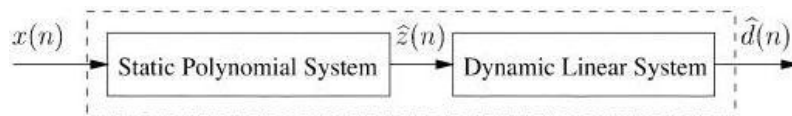
<sup>5</sup> Infinit Impulse Response(IIR)

<sup>6</sup> Step size

### ۳ - ۱ - معرفی سیستم هم‌رشتاین

همانطور که می‌دانیم، شناسایی سیستم‌ها در حوزه‌های فنی و غیرفنی حائز اهمیت فراوان می‌باشد. به‌طور تقریبی می‌توان گفت همه سیستم‌های شناخته‌شده رفتار غیرخطی دارند، بنابراین بهتر است برای توضیح یک سیستم از مدل غیرخطی استفاده کرد [1]. سیستم‌های وینر<sup>۱</sup> و هم‌رشتاین اثبات کرده‌اند که روش مناسبی برای مدل‌سازی سیستم‌های دینامیک غیرخطی که در آن‌ها قسمت غیرخطی استاتیک و بخش دینامیک خطی از یکدیگر در مرتبه‌های مختلف جدا شده‌اند، می‌باشند.

هدف ما توضیح نحوه پیاده‌سازی و کارایی تجربی یک الگوریتم تطبیقی است که از مدل سیستم هم‌رشتاین استفاده می‌کند. سیستم‌های هم‌رشتاین متشکل از سیستم‌های غیرخطی بدون حافظه بوده که با یک سیستم خطی، همانند شکل ۱-۳، به صورت سری قرار گرفته‌اند. کاربردهای فراوانی از سیستم‌های غیرخطی سری تا به امروز شناخته شده‌اند که از میان آنها می‌توان به مدلسازی سیستم‌های مخابرات ماهواره‌ای، سیستم‌های بیولوژیکی، درایورهای الکتریکی و تقویت‌کننده‌ها اشاره کرد.



شکل ۱ - ۳ بلوک دیاگرام یک سیستم هم‌رشتاین

تاکنون، تعدادی از روش‌های غیر پارامتریک برای شناسایی سیستم‌های هم‌رشتاین ارائه شده‌اند. اما در میان روش‌های پارامتریک ما روشی را بر می‌گزینیم که در آن سیستم چند جمله‌ای و زیر سیستم دینامیک خطی، به صورت تکراری تخمین زده می‌شوند. در میان روش‌هایی که تاکنون برای پیاده‌سازی این سیستم‌ها مطرح شده‌اند، روش‌های مبتنی بر گرادیان اتفاقی<sup>۲</sup> و همچنین روش مبتنی بر طراحی فیلتر کالمن از شهرت بیشتری برخوردارند. هر چند در این روش‌ها فرض بر این بوده که پارامترهای مدل غیرخطی ثابت باشند. از نقطه نظر پایداری، فعالیت‌هایی بر روی سیستم‌های مبتنی بر فیلترهای FIR<sup>۳</sup> صورت گرفته است، با این حال بررسی پایداری برای مدل IIR کم و یا بسیار محدود بوده است.

فرض کنید رابطه ورودی خروجی فیلتر تطبیقی به صورت زیر باشد

<sup>1</sup> Wiener Systems

<sup>2</sup> Stochastic Gradient

<sup>3</sup> Finite Impulse Response

$$\hat{d}(n) = -\sum_{i=1}^N \hat{a}_i(n) \hat{d}(n-i) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) \hat{z}(n-j) \quad (3-1)$$

در حالی که

$$\hat{z}(n) = \hat{p}_1(n)x(n) + \hat{p}_2(n)x^2(n) + \dots + \hat{p}_l(n)x^l(n) \quad (3-2)$$

خروجی سیستم چند جمله ای بدون حافظه غیرخطی و  $x(n)$  ورودی فیلتر تطبیقی می باشند. در معادلات بالا،  $\hat{p}_l(n)$ ،  $\hat{a}_i(n)$  و  $\hat{b}_j(n)$  معرف ضرائب فیلتر تطبیقی در زمان  $n$  هستند. با تنظیم  $\hat{b}_0(n) = 1$  برای تمام  $n$  ها، برای داشتن راه حل یکتا در طول فرایند شناسائی، معادله ۱ - ۳ را می-توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \hat{d}(n) &= Z(n) - \sum_{i=1}^N \hat{a}_i(n) \hat{d}(n-i) + \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) \hat{z}(n-j) \\ &= \sum_{l=1}^N \hat{p}_l(n) x^l(n) - \sum_{i=0}^N \hat{a}_i(n) \hat{d}(n-i) + \sum_{j=1}^M \hat{b}_j(n) \hat{z}(n-j) \end{aligned} \quad (3-3)$$

عبارت فوق از نقطه نظر داده ها دارای ماهیت غیرخطی و از دیدگاه پارامترها خطی است، بنابراین عبارتی ایده آل برای پیاده سازی سیستم هم‌رشتاین می باشد. همچنین تأکید می شود که با ثابت کردن هر یک از ضرائب در سیستم می توان یکتا بودن پاسخ سیستم را تضمین کرد.

هدف فیلتر تطبیقی ارائه شده در این پایان نامه، به روز کردن ضرائب مدل غیرخطی توسط روش گرادیان اتفاقی می باشد به طوری که مربع خطای تخمین زده شده لحظه ای در هر بار تکرار کاهش یابد. با عمود کردن سیگنال ورودی به زیر سیستم چند جمله ای، علی الخصوص زمانی که سیستم استاتیک غیرخطی از مرتبه بالا باشد، می توان رفتار همگرایی سیستم را بهبود بخشید. برای حالتی که مرتبه غیرخطی بالا است، ماتریس خود همبستگی<sup>۱</sup> مربوط به بردار سیگنال های غیرخطی  $x(n) = \left[ x(n) x(n)^2 \dots x(n)^L \right]^T$  حتی در زمانهایی که سیگنال ورودی سفید است،

گسترش مقادیر ویژه وسیعی دارد. در روش ارائه شده، مسئله ای که پیش روی چنین حالتی برای به روز کردن ضرائب قرار دارد، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. به علاوه، زیر سیستم IIR

<sup>1</sup> Autocorrelation Matrix

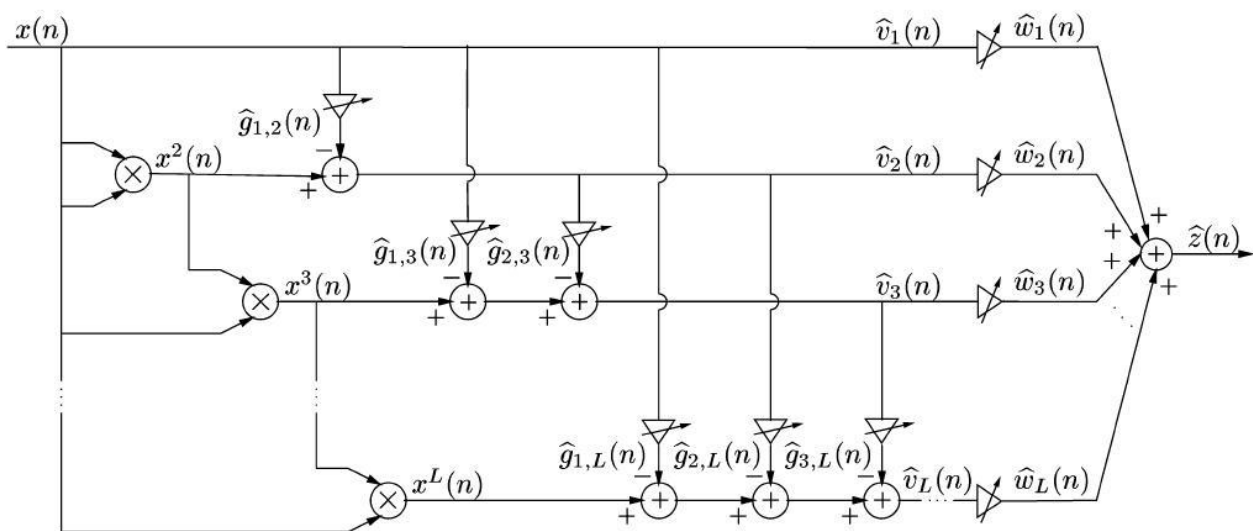
تطبیقی با به کار بردن دنباله اندازه حرکت، پایداری سیستم را تضمین می کند. در واقع از روش پایداری لیاپانوف<sup>۱</sup> جهت پایداری فیلتر IIR استفاده شده است.

### ۳ - ۲ الگوریتم تطبیقی برای مدل هم‌رشتاین

فرض کنید  $x(n)$  و  $d(n)$  به ترتیب معرف سیگنال ورودی به سیستم و سیگنال مطلوب باشند. شکل ۲ - ۳ روشی را که برای متعامد سازی سیگنال های ورودی به زیر سیستم چند جمله ای تطبیقی در نظر گرفته شده است نشان می دهد. هدف از به کارگیری متعامد ساز گرام - اشمیت تولید سیگنال های  $v_1(n), v_2(n), \dots, v_L(n)$  به گونه ای است که داشته باشیم

$$E\{\hat{v}_i(n)\hat{v}_j(n)\} = 0 \quad (3-4)$$

و سیگنال های مجموعه  $\{\hat{v}_i(n), i=1,2,\dots,L\}$  فضائی را که توسط سیگنالهای مجموعه  $\{x^i(n), i=1,2,\dots,L\}$  پوشش داده شده بودند را، پوشش می دهند. هدف، تطبیق دادن ضرائب  $\hat{g}_{i,j}(n)$  به گونه ای است که معادله ۴ - ۳ با تقریب خوبی تحقق یابد.



شکل ۲ - ۳ متعامد سازی زیر سیستم غیر خطی

سیگنالهای خروجی از متعامد ساز گرام - اشمیت، برای بدست آوردن خروجی میانی  $\hat{Z}(n)$  مورد استفاده قرار می گیرند

<sup>1</sup> Lyapunov Stability

$$\hat{Z}(n) = \sum_{i=1}^L \hat{\omega}_i(n) \hat{v}_1(n). \quad (3-5)$$

هدف ما، به روز کردن ضرائب  $\hat{w}_l(n)$ ،  $\hat{a}_i(n)$  و  $\hat{b}_j(n)$  به گونه ای است که  $\hat{d}(n)$  تا حد ممکن به سیگنال پاسخ مربوطه نزدیک باشد. بنابراین ما به دنبال الگوریتم تطبیقی گرادینان اتفاقی ای هستیم که در جهت کاهش عبارت زیر گام بردارد.

$$J\left(\hat{a}_1(n), \dots, \hat{a}_N(n), \hat{b}_0(n), \hat{b}_1(n), \dots, \hat{b}_M(n), \hat{\omega}_1(n), \dots, \hat{\omega}_L(n)\right) \\ = [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)]^2 \quad (3-6)$$

این در حالی است که اطلاعات ماقبل  $\hat{d}_{ap}(n)$  به صورت زیر بدست می آیند

$$\hat{d}_{ap}(n) = -\sum_{i=1}^N \hat{a}_i(n-1) \cdot \hat{d}(n-i) + \sum_{j=1}^M \hat{b}_j(n-1) \cdot \hat{z}(n-j) \quad (3-7)$$

همچنین به روز کردن ضرائب متعامدساز گرام اشمیت مورد نیاز است. به روز رسانی ضرائب برای  $\hat{a}_1(n)$ ،  $\hat{b}_1(n)$  و  $\hat{\omega}_\ell(n)$  به قرار زیر می باشند

$$\hat{a}_i(n) = \hat{a}_i(n-1) - \mu_i(n) \frac{\partial \left( \frac{1}{2} [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)]^2 \right)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} \\ = \hat{a}_i(n-1) + \mu_i(n) [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)] \frac{\partial \hat{d}_{ap}(n)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} \quad (3-8)$$

$$\hat{b}_j(n) = \hat{b}_j(n-1) - \mu_{N+j}(n) \frac{\partial \left( \frac{1}{2} [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)]^2 \right)}{\partial \hat{b}_j(n-1)} \\ = \hat{b}_j(n-1) + \mu_{N+j}(n) [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)] \frac{\partial \hat{d}_{ap}(n)}{\partial \hat{b}_j(n-1)} \quad (3-9)$$

$$\begin{aligned}
\hat{\omega}_\ell(n) &= \hat{\omega}_\ell(n-1) - \mu_{N+M+\ell}(n) \frac{\partial(\frac{1}{2}[d(n) - \hat{d}_{ap}(n)]^2)}{\partial \hat{w}_l(n-1)} \\
&= \hat{\omega}_j(n-1) + \mu_{N+M+\ell}(n) [d(n) - \hat{d}_{ap}(n)] \frac{\partial \hat{d}_{ap}(n)}{\partial \hat{w}_l(n-1)}
\end{aligned} \quad (3-10)$$

و  $1 \leq l \leq p$  و  $0 \leq j \leq M$  و  $1 \leq i \leq N$  و  $\mu_{N+M+1} > 0$  و  $\mu_{N+j}(n)$  و  $\mu_i(n)$  در معادلات فوق،  $\mu_i(n)$  ها معرف اندازه قدم هائی است که توسط الگوریتم تطبیقی به کار گرفته شده اند و رشته های مثبت و کوچکی هستند. برای بدست آوردن معادلات واضح تر، مشتقات جزئی معادلات ۹ تا ۱۰ را بسط می دهیم. حل معادله با مشتقات جزئی برای  $\hat{d}_{ap}(n)$  بر حسب  $\hat{a}_i(n-1)$  به صورت زیر است

$$\frac{\partial \hat{d}_{ap}(n)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} = -\hat{d}(n-i) - \sum_{s=1}^N \hat{a}_s(n-1) \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} \quad (3-11)$$

همانطور که در تحلیل فیلترهای IIR تطبیقی رایج است، فرض می کنیم تطبیق به قدری آهسته صورت می گیرد که شرایط زیر برقرار باشند

$$\frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} \approx \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{a}_i(n-s)}; \quad 1 \leq i \leq N \quad (3-12)$$

$$\frac{\partial \hat{d}_{ap}(n)}{\partial \hat{a}_i(n-1)} \approx \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{a}_i(n)}; \quad 1 \leq i \leq N \quad (3-13)$$

با جایگذاری عبارات در معادله ۱۱ - ۳ خواهیم داشت

$$\frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{a}_i(n)} \approx -\hat{d}(n-i) - \sum_{s=1}^N \hat{a}_s(n-1) \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{a}_i(n-s)}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (3-14)$$

به روش مشابه داریم

$$\frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{b}_j(n)} \approx -\hat{z}(n-j) - \sum_{s=1}^N \hat{a}_s(n-1) \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{b}_j(n-s)}, \quad 0 \leq i \leq M \quad (3-15)$$

در نهایت معادله به روز رسانی برای زیر سیستم چند جمله ای به صورت زیر داده می شود

$$\frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{\omega}_l(n-1)} = -\sum_{s=1}^N \hat{a}_s(n-1) \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{\omega}_l(n-s)} + \sum_{s=1}^M \hat{b}_s(n-1) \hat{v}_\ell(n-s) \frac{\partial \hat{\omega}_\ell(n-s)}{\partial \hat{\omega}_\ell(n-1)}; 1 \leq \ell \leq L \quad (3-16)$$

همانند قبل فرض کرده ایم فرایند تطبیق بسیار آهسته و تقریبهای زیر برقرارند

$$\frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{\omega}_l(n-1)} \approx \frac{\partial \hat{d}(n-s)}{\partial \hat{\omega}_l(n-s)}; \quad (3-17)$$

$$\frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{\omega}_l(n-1)} \approx \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{\omega}_l(n)} \quad (3-18)$$

$$\frac{\partial \hat{\omega}_\ell(n-s)}{\partial \hat{\omega}_\ell(n-1)} = 1 \quad (3-19)$$

با ترکیب کردن معادلت ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ می توانیم به عبارت بسته زیر برای به روز کردن ضرائب برسیم

$$\phi(n) = \psi(n) - \sum_{s=1}^N \hat{a}_s(n-1) \phi(n-s) \quad (3-20)$$

در حالیکه داریم

$$\phi(n) = \left[ \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{a}_1(n)} \dots \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{a}_N(n)} \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{b}_1(n)} \dots \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{b}_M(n)} \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{\omega}_1(n)} \dots \frac{\partial \hat{d}(n)}{\partial \hat{p}_L(n)} \right]^T \quad (3-21)$$

و بردار اطلاعات توسط رابطه زیر داده می شود

$$\varphi(n) = \left[ -\hat{d}(n-1) \dots -\hat{d}(n-N) \hat{z}(n-1) \dots \hat{z}(n-M) \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) \hat{v}_1(n-j) \dots \sum_{j=0}^M \hat{b}_j(n) \hat{N}_L(n-j) \right]^T \quad (3-22)$$

به همین ترتیب بردار پارامترها را به صورت زیر معرفی می کنیم

$$\hat{\theta}(n) = \left[ \hat{a}_1(n) \dots \hat{a}_N(n) \hat{b}_1(n) \dots \hat{b}_M(n) \hat{\omega}_1(n) \dots \hat{\omega}_L(n) \right]^T, \quad b_0(n) = 1 \quad (3-23)$$

و برای بردار داده داریم

$$\hat{H}(n) = \left[ -\hat{d}(n-1) \cdots -\hat{d}(n-N) \hat{z}(n-1) \cdots \hat{z}(n-M) \hat{v}_1(n) \cdots \hat{v}_L(n) \right]^T \quad (3-24)$$

سپس ، معادلات به روز کردن ضرائب فیلتر در فرم ماتریسی را به صورت زیر خواهیم داشت

$$e(n) = d(n) - \hat{H}^T(n) \hat{\theta}(n-1) \quad (3-25)$$

$$\hat{\theta}(n) = \hat{\theta}(n-1) + \Lambda(n) \phi(n) e(n) \quad (3-26)$$

$$\Lambda(n) = \text{diag}[\mu_1(n) \cdots \mu_{N+M+L}(n)] \quad (3-27)$$

برای بهبود رفتار همگرایی فیلتر تطبیقی، از فرم نرمالیزه شده فیلتر به صورت زیر استفاده می کنیم

$$\hat{\theta}(n) = \hat{\theta}(n-1) + \frac{\Lambda(n) \phi(n)}{\delta + \hat{H}^T(n) \Lambda(n) \phi(n)} e(n) \quad (3-28)$$

که در آن  $\delta$  يك عدد ثابت مثبت كوچك بوده و کاربرد آن جلوگیری از تقسیم بر اعداد بسیار كوچك در حالي كه  $\hat{H}^T(n) \Lambda(n) \phi(n)$  عددی كوچك است می باشد. این انتخاب نرمالیزه شده برای  $\delta = 0$  منتج به خطای صفر به صورت استقرایی می شود. بعلاوه، در میان روشهای بسیاری كه دارای چنین نتیجه ای هستند، عبارت برگزیده شده، دارای كوچكترین اختلال در بردار ضرائب می باشد. در نهایت از روش نیوتن برای بهبود به روز کردن ضرائب استفاده می كنیم. این كار با تغییر مقیاس بردار افزایش ضرائب توسط معكوس ماتریس خود همبستگی بردار اطلاعات صورت می گیرد. ماتریس  $R(n)$  از روش بازگشتی به صورت زیر محاسبه می شود

$$R(n) = \lambda R(n-1) + (1-\lambda) \phi(n) \phi^T(n) \quad (3-29)$$

كه در آن  $0 \leq \lambda < 1$  است. معكوس آن توسط لم معكوس كردن ماتریس به صورت بازگشتی بدست می-آید

$$R^{-1}(n+1) = \frac{1}{\lambda} (R^{-1}(n) - \frac{R^{-1}(n) \phi(n) \phi^T(n) R^{-1}(n)}{\frac{\lambda}{1-\lambda} + \phi^T(n) R^{-1}(n) \phi(n)}) \quad (3-30)$$

در هنگام پیاده سازی معادله ۳۰ - ۳، باید ملاحظات مربوط به تقارن  $R^{-1}(n+1)$  در نظر گرفته شود. با جایگذاری معادله ۳۰ در ۲۸ به معادله به روز رسانی فیلتر تطبیقی می رسیم



$$\hat{\theta}(n) = \hat{\theta}(n-1) + \frac{\Lambda(n)\phi(n)}{\delta + \hat{H}^T \Lambda(n)\phi(n)} e(n) \quad (3-31)$$

این طور به نظر می رسد که متعامد سازی ورودی به زیر سیستم چند جمله ای به همراه متعامدسازی مهیا شده توسط استراتژی به روز کردن نیوتن، قابلیت اطمینان بالایی حتی در حضور کانالهائی با مرتبه غیرخطی بالا به ما می دهد.

۳ - ۳ متعامد سازی ورودی به زیر سیستم چند جمله ای

همانطور که در شکل ۲ - ۳ ملاحظه شد، در فرایند متعامدسازی ورودی به زیر سیستم چند جمله ای داریم

$$\hat{v}_1(n) = x(n) \quad (3-32)$$

مابقی سیگنال های متعامد به صورت زیر محاسبه می شوند

$$\hat{v}_\ell(n) = x^\ell(n) - \sum_{j=1}^{l-1} \hat{g}_{j,\ell}(n) \hat{v}_j(n), \ell = 2, \dots, L \quad (3-33)$$

از آنجائی که سیگنال میانگین مربع خطا بهینه به ورودی ها عمود است، استراتژی به روز رسانی ای که در جهت کاهش  $e_{j,l}^2(n)$  قدم بردارد به صورت زیر داده می شود

$$e_{j,\ell}(n) = x^\ell(n) - \sum_{s=1}^j \hat{g}_{s,\ell}(n) \hat{v}_s(n), \ell = 2, \dots, L, j = 1, \ell - 1 \quad (3-34)$$

بنابراین استراتژی به روز رسانی ضرائب مربوط به پردازشگر گرام - اشمیت، به صورت زیر نوشته می شود

$$\hat{g}_{j,\ell}(n+1) = \hat{g}_{j,\ell}(n) + \frac{\mu_{j,\ell}(n)}{\delta_0 + \sigma_{v_j}^2(n)} e_{j,\ell}(n) \hat{v}_j(n), \ell = 2, \dots, L, j = 1, \dots, \ell - 1 \quad (3-35)$$

که در آن ها  $\delta_0$  يك ضريب ثابت مثبت و  $\sigma_{v_j}^2(n)$  به صورت زیر محاسبه می شود

$$\sigma_{j,\ell}^2(n) = \lambda_g \sigma_{g v_j}^2(n-1) + (1 - \lambda_g) \hat{v}_j^2(n), j = 1, \dots, l-1, 0 < \lambda_g < 1 \quad (3-36)$$

۴-۳ انتخاب اندازه حرکت (قدم)

اساس انتخاب اندازه قدم، که عملکرد پایدار زیر سیستم IIR را تضمین کند، قضیه زیر است

قضیه: معادله حالت خطی زیر

$$X_s(n+1) = A(n)X_s(n) \quad X_s(n_0) = x_0 \quad (3-37)$$

پایدار از نظر نمایی و یکنواخت است، اگر و تنها اگر رشته ماتریسهای  $N \times N$  به شکل  $Q(n)$  به صورت متقارن برای تمام  $n$  ها وجود داشته باشد به طوریکه

$$\eta I \leq Q(n) \leq \rho I \quad (3-38)$$

$$A^T(n)Q(n+1)A(n) - Q(n) \leq -\gamma I \quad (3-39)$$

که در آنها  $\eta$ ،  $\rho$  و  $\gamma$  ثابت، مثبت و محدود هستند. شرط وجود ثابت مثبت  $\eta$  برای  $\eta I \leq Q(n)$  برای تمام  $n$  ها، معادل تعریف وجود مثبت  $\eta$  در رابطه  $\|X_\eta\|^2 \leq X_\eta^T Q(n) X_\eta$  برای تمام  $n$  ها و تمام بردارهای  $N \times 1$  که در آن  $\|X_\eta\| = \sqrt{X_\eta^T X_\eta}$  است، می باشد. این، همان شرایط لیپانوف می-باشد. از آنجایی که الگوریتم تطبیق به فرم زیر است

$$\hat{\theta}(n+1) = \hat{\theta}(n) + \mu(n)\varphi_L(n) \quad (3-40)$$

$$\varphi_n(n) = (\Lambda(n)R^{-1}(n+1)\varphi(n)/(\delta + \hat{H}^T(n)\Lambda(n)\varphi(n)e(n))$$

می توان بیان فرم مستقیم<sup>1</sup> فیلتر IIR را تبدیل به فرم فضای حالت کرده و از قضیه فوق استفاده کنیم سیستم هم‌رشتاین در فرم فضای حالت به صورت زیر نوشته می شود

$$X_s = A(n)X_s(n) + B(n)u_s(n) \quad (3-41)$$

$$y_s(n) = C(n)X_s(n) + D(n)u_s(n) \quad (3-42)$$

که در آنها

$$X_s(n) = [\hat{d}(n-1) \ \hat{d}(n-2) \ \dots \ \hat{d}(n-N)]^T \quad (3-43)$$

$$u_s(n) = [\hat{z}(n-1) \ \hat{z}(n-2) \ \dots \ \hat{z}(n-M) \ \hat{v}_1(n) \ \dots \ \hat{v}_L(n)]^T \quad (3-44)$$

$$y_s(n) = [\hat{d}(n) \ \hat{z}(n)]^T \quad (3-45)$$

---

<sup>1</sup> Direct Form Representation

$$A(n) = \begin{bmatrix} -\hat{a}_1(n) & -\hat{a}_2(n) & \dots & -\hat{a}_{N-1}(n) & -\hat{a}_N(n) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

$$B(n) = \begin{bmatrix} \hat{b}_1(n) & \hat{b}_2(n) & \dots & \hat{b}_M(n) & \hat{w}_1(n) & \dots & \hat{w}_L(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3-47)$$

$$C(n) = \begin{bmatrix} -\hat{a}_1(n) & -\hat{a}_2(n) & \dots & -\hat{a}_{N-1}(n) & -\hat{a}_N(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

$$D(n) = \begin{bmatrix} \hat{b}_1(n) & \hat{b}_2(n) & \dots & \hat{b}_M(n) & \hat{w}_1(n) & \dots & \hat{w}_L(n) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{w}_1(n) & \dots & \hat{w}_L(n) \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

ضرائب در زمان های  $n$  و  $n+1$  باید نامساوی زیر را برآورده کند

$$\|vec[Q(n+1)] - vec[Q(n)]\| < 1 \quad (3-50)$$

$$vec[Q(n+1)] = -[A^T \otimes A^T - I_{N^2}]^{-1} vec[I_N] \quad (3-51)$$

در عبارات فوق  $vec[.]$  نشانگر عملگری است که در آن ستون های يك ماتریس پشت سر یکدیگر قرار می گیرند که يك بردار ستونی را تشکیل دهند و  $\otimes$  علامت ضرب کرونوکر<sup>۱</sup> می باشد. در حین کار فیلتر و فقی، اندازه قدم ها به گونه ای انتخاب می شوند که از ماکزیمم از پیش تعیین شده کوچکتر باشند و یا ماکزیمم مقداری باشند که نامساوی ۵۰ را برآورده کنند. این انتخاب به صورت زیر انجام می گیرد: برای هر اندازه قدم داده شده در هر تکرار ما مقادیر جدید پارامترهای  $\hat{a}_i$  را محاسبه کرده،

<sup>1</sup> Kronocker Product

با استفاده از معادله ۵۱،  $ved[Q(n+1)]$  را حساب می کنیم. سپس بررسی می کنیم که آیا معادله ۵۰ برقرار است و یا نه. این الگوریتم تضمین می کند که تمام قطب های لحظه ای سیستم درون دایره واحد باشند، بنابراین نیاز به چک کردن مجدد محل قطب ها نیست. به علاوه ما اندازه قدم ها در  $\Lambda(n)$  را کاهش می دهیم به طوریکه  $\delta + \hat{H}^T(n)\Lambda(n)\varphi(n) > 0$  که در آن  $\delta$  يك ثابت مثبت كوچك،  $0 < \beta < 1$ . این مسئله تضمین می کند که علامت بردار گرادیان ثابت بماند، یعنی تضمین می شود  $\delta \hat{H}^T(n)\Lambda(n)\varphi(n) > 0$  و عبارت متناظر با  $\varphi_n(n)$  بیان شده در بالا، یعنی  $(\Lambda(n)R^{-1}(n + 1)\varphi(n)/(\delta + \hat{H}^T(n)\Lambda(n)\varphi(n)e(n)))$  ضرائب را به سمت صحیح هدایت کند، به طوریکه مربع خطای تقریبی لحظه ای را در هر بار تکرار، همانطور که هدف الگوریتم بود، کاهش می دهد. برای مقادیر مثبت  $\beta$  که مؤکداً کوچکتر از ۱ هستند، می توان همگرایی الگوریتم را به می نیم سطح خطا نشان داد. اکنون تمام معادلات لازم برای پیاده سازی الگوریتم در دست هستند.

### ۵-۳ پیچیدگی محاسباتی

برای سادگی بیشتر فرض می کنیم  $N$ ، تعداد ضرائب فیدبک زیر سیستم خطی، از  $M$ ، تعداد ضرائب پیش سو و از  $L$  تعداد ضرائب زیر سیستم چند جمله ای بزرگتر و یا مساوی آنان باشد. الگوریتم ارائه شده در بالا می تواند توسط  $O(N^{225} + LN^2)$  عملیات محاسباتی در هر بار تکرار، پیاده سازی شود.

در سه قسمت از الگوریتم، نیاز به تعداد بیشتری محاسبه نسبت به پیچیدگی خطی  $O(N+M+L)$  نیاز است. متعادل ساز گرام اشمیت نیاز به  $O(L)^2$  عملیات برای پیاده سازی دارد (در هر بار تکرار). عملیات جستجو برای یافتن اندازه قدمی که پایداری الگوریتم را تضمین کند نیاز به محاسبه ماتریس معکوس  $[A^T \otimes A^T - I_{N^2}]^{-1}$  دارد. از آنجائی که این ماتریس کوچک بوده و بیشتر از ۵ عنصر غیر صفر در هر ردیف ندارد، روشهایی وجود دارند که ماتریس را با پیچیدگی محاسباتی متناظر با  $O(N^{2.25})$  عملیات ریاضی تبدیل می کنند. بخش سوم پیچیدگی محاسباتی مربوط به محاسبه  $R^{-1}(n)$  میباشد که از نتیجه آن برای به روز کردن ضرائب استفاده می شود. الگوریتم های سریع برای معکوس کردن ماتریس خود همبستگی با  $O(L^2N)$  عملیات ریاضی موجود می باشند. به روز کردن ضرائب، همانطور که در معادله ۳۱ - ۳ آمده است نیاز به تعداد  $O((N+M+L)^2)$  عملیات بیشتر دارد. با مفروضات  $L \leq N$  و  $M \leq N$  این پیچیدگی می تواند با  $O(N^2)$  محاسبه بیان شود. البته

الگوریتم ارائه شده در این پایان نامه دارای پیچیدگی بالاتری است، چرا که از مفروضات ساده سازی در محاسبه معکوس ماتریس استفاده نشده است.

### ۳-۶ پایدار ی فیلتر هم‌رشتاین تطبیقی

در این بخش به بررسی پایداری سیستم در رژیم خروجی محدود به ازای ورودی محدود (BIBO)، توسط لم معرفی شده در ادامه می پردازیم.

اگر معادله حالت خطی ۳-۳۷ به طور یکنواخت، پایدار نمائی باشد و مقادیر محدود و ثابت زیر وجود داشته باشند به طوریکه

$$\|B(n)\| \leq C_B, \|C(n)\| \leq C_c, \|D(n)\| \leq C_D \quad (3-52)$$

معادلات حالت ۴۱ و ۴۲ نیز به طور یکنواخت پایدار BIBO خواهند بود.

انتخاب دنباله اندازه قدم تضمین می کند که سیستم همگن<sup>۱</sup> ۳۷ - ۳ به طور یکنواخت و نمایی پایدار باشد. برای برآورده شدن شرایط در ۵۲ - ۳، ما مقادیر  $B(n)$ ،  $C(n)$ ،  $D(n)$  را به اعدادی بزرگ اما معین محدود می کنیم. در شبیه سازی، این مقدار برابر با ۱۰۰ انتخاب شده است. فرض شده است سیگنال ورودی  $X(n)$  به خودی خود محدود باشد. معادله به روز کردن ضرائب در ۳۵ يك معادله فیلتر از نوع FIR بوده که برای اندازه قدم های به اندازه کافی کوچک، پایدار می باشد در نتیجه تمام سیگنال های  $\hat{v}_\ell(n)$  محدود خواهند بود. خروجی میانی  $\hat{z}(n)$  به صورت  $\hat{z}(n) = \hat{w}_1 \hat{v}_1 + \dots$  سیگنال های  $\hat{w}_n \hat{v}_n$  محاسبه می شود. از آنجائی که  $\hat{\omega}_\ell(n)$  با مقادیر مشخص محدود شده است و  $\hat{v}_\ell(n)$  ها نیز محدود هستند،  $\hat{z}(n)$  نیز محدود خواهد بود.

برای معادلات حالت خطی ۴۱ و ۴۲ که به صورت یکنواخت پایدار BIBO هستند، ثابت محدود  $\eta$  به طوری وجود دارد که برای هر زمان اولیه مشخص  $n_0$  و هر سیگنال ورودی  $u_s(n)$ ، پاسخ حالت صفر مربوطه در محدوده زیر قرار خواهد داشت

$$\sup \|y_s(n)\| \leq \eta \sup \|u_s\|, \quad n \geq n_0 \quad (3-52)$$

عبارت یکنواخت به این معناست که  $\eta$  مشابه می تواند برای تمام مقادیر  $n_0$  و برای تمام سیگنال های ورودی مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین پایداری BIBO یکنواخت تضمین می کند که رفتار ورودی -

<sup>1</sup>Homogenous

خروجی فیلتر هم‌رشتاین تطبیقی، بهره محدودی بر حسب ورودی و خروجی‌ها ارائه می‌دهد. در نتیجه فیلتر تطبیقی ارائه شده در این بخش رفتار پایداری از خود نشان می‌دهد.

## بخش چهارم: نتایج شبیه سازی

در این قسمت نتایج شبیه سازی های متعدد که برای سنجش و ارزیابی عملکرد فیلتر منطبق ارائه شده در بخش سه به کار رفته اند را ارائه می دهیم. تمام شبیه سازی ها درگیر با شناسائی يك سیستم هم‌رشتاین ناشناخته می باشند. در آزمایش اول، رابطه ورودی خروجی سیستم غیرخطی بدون حافظه به صورت زیر است

$$z(n) = 0.4x(n) - 0.3x^2(n) + 0.2x^3(n) \quad (4-1)$$

و تابع تبدیل بخش خطی به صورت زیر در نظر گرفته شده است

$$H(z) = \frac{1+0.8z^{-1}}{1-1.2z^{-1}+0.5z^{-2}} \quad (4-2)$$

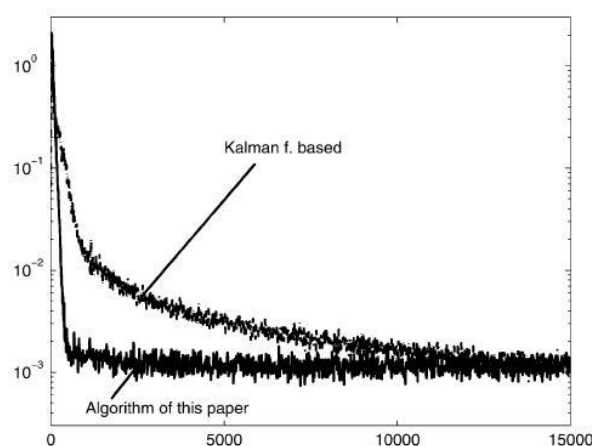
سیگنال پاسخ مطلوب فیلتر تطبیقی توسط تجمیع نویز با میانگین و واریانس صفر با سیگنال خروجی از سیستم ناشناخته بدست آمده است، به طوریکه نسبت سیگنال به نویز خروجی برابر ۲۰ dB باشد. سیگنال ورودی به فیلتر منطبق توسط عبور یک سیگنال یکنواخت با میانگین صفر و واریانس 0.19 از فیلتر زیر بدست آمده است

$$H(z) = 1 + 0.95z^{-2} \quad (4-2)$$

نحوه پیاده سازی فیلتر تطبیقی به این صورت است که اندازه قدم متغیر با زمان در بخش بازگشتی دارای ماکزیمم  $\mu = 1.5 \times 10^{-5}$  بوده و یا توسط محدوده پیشنهادی در شرایط ۵۰ - ۳ تأمین شود. اندازه

قدم برای ضرائب بخش پیش سو در زیر سیستم خطی و ضرایب زیر سیستم چند جمله ای ثابت و برابر  $\mu = 1.5 \times 10^{-5}$  می باشند. اندازه قدم برای ضرائب متعامد ساز ثابت و برابر  $5 \times 10^{-4}$  فرض شده اند. به همین ترتیب  $\delta = 10^{-5}$ ،  $\delta = 10^{-3}$ ،  $\lambda_g = 0.99$ ،  $\beta = 0.9$  و  $\lambda = 0.95$  فرض شده اند. مقدار اولیه ماتریس  $R^{-1}$  به صورت يك ماتریس قطری با مقادیر  $\delta = 1$  روی قطر اصلی فرض شده است. مقدار اولیه  $\hat{\sigma}_{v_j}^2(n) = 10$  در نظر گرفته شده است. حالت اولیه سیستم به شکلی طراحی شده است که قطب و صفرهای زیر سیستم خطی در مبدأ قرار داشته و مقدار اولیه ضرائب چند جمله ای برابر صفر باشند. ضریب  $\hat{b}(n)$  برابر یک قرار داده شد و در تمامی طول شبیه سازی تغییر داده نشده است. به این ترتیب یکنائی پاسخ تضمین می شود. جهت تضمین پایداری BIBO متعامدساز و قسمت پیش سوی فیلتر خطی تطبیقی، یک محدوده بالائی برای مقدار مطلق متعامد ساز و ضرائب پیش سو در نظر گرفته شده است. کارائی عملکرد این روش، با روشی که در آن از فیلتر کالمن استفاده شده است مقایسه می شود. مقدار اولیه ماتریس کوواریانس خطا  $p(n)$  در روش بر پایه فیلتر کالمن، یک ماتریس قطری با مقادیر  $0.001$  روی قطر اصلی بوده است. پارامترها به گونه ای انتخاب شده اند که میانگین مربع خطای اضافی برای هر دو الگوریتم تقریباً برابر بوده است.

شکل ۱ - ۴، مقدار میانگین مربع خطا را برای هر دو الگوریتم با ارسال ۱۵۰۰۰ نمونه نشان می دهد. نتایج نشان می دهد که الگوریتم ارائه شده، همگرایی سریعتری نسبت به الگوریتم بر پایه فیلتر کالمن دارد. جدول ۱ - ۴، مشخصات آماری هر دو الگوریتم را نشان می دهد [3].



شکل ۱ - ۴ میانگین مربع خطا برای هر دو الگوریتم



Coeff.	True	Algorithm of this paper		Kalman based [9]	
		Mean	Var. [ $10^{-4}$ ]	Mean	Var. [ $10^{-4}$ ]
$\hat{a}_1$	-1.2	-1.2018	0.6931	-1.2362	0.4406
$\hat{a}_2$	0.5	0.5012	0.3920	0.5260	0.2277
$\hat{b}_0$	1	-	-	-	-
$\hat{b}_1$	0.8	0.7952	2.4026	0.6577	6.9609
$\hat{p}_1$	0.4	0.4006	0.2428	0.4175	0.1804
$\hat{p}_2$	-0.3	-0.2998	0.6038	-0.3149	0.0768
$\hat{p}_3$	0.2	0.1977	0.9330	0.2063	0.0681

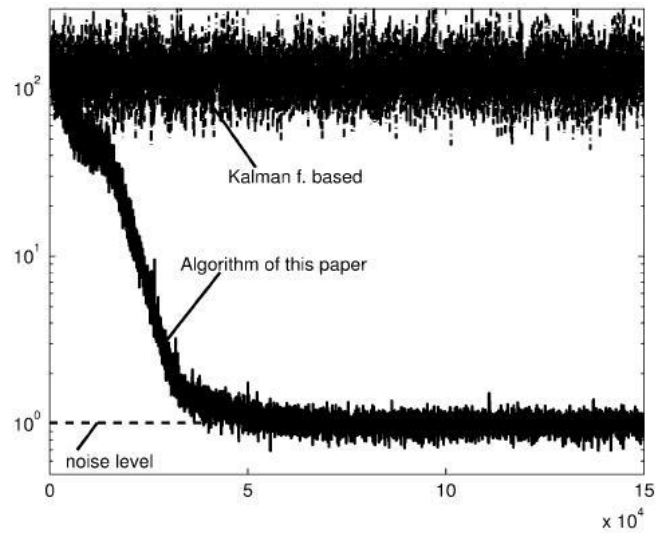
جدول ۱ - ۴ مقایسه عملکرد دو فیلتر تطبیقی

ضرائب سیستم چند جمله ای  $\hat{p}_l$  با تبدیل معکوس ضرائب  $\hat{\omega}_l$  به شکل مستقیم بدست آمده اند. مقدار میانگین موجود در جدول ۱ - ۴ برای الگوریتم ارائه شده، برای ۵۰۰ نمونه آخر محاسبه شده است. مقدار واریانس نیز به همین ترتیب بدست آمده است. همانطور که قبلاً هم مشخص شده بود، الگوریتم در حالت کاملاً پایدار عمل کرده و همگرایی آن در تمام تکرارها مشخص شده است. مشاهده می شود که عملکرد سیستم در شرایط مختلف حتی در حالت SNR=0 نیز قابل قبول می باشد.

در شبیه سازی بعدی، فیلتر تطبیقی ای که برای مسئله شناسایی سیستم در نظر گرفته شده است بخش خطی یک سیستم ناشناخته است که رابطه زیر را برآورده می کند

$$H(z) = \frac{\tilde{D}(z)}{Y(z)} = \frac{1-1.3334z^{-1}+1.6667z^{-2}-2.665z^{-3}+1.9666z^{-4}}{1-2.6z^{-1}+2.78z^{-2}-1.48z^{-3}+0.34z^{-4}} \quad (4-3)$$

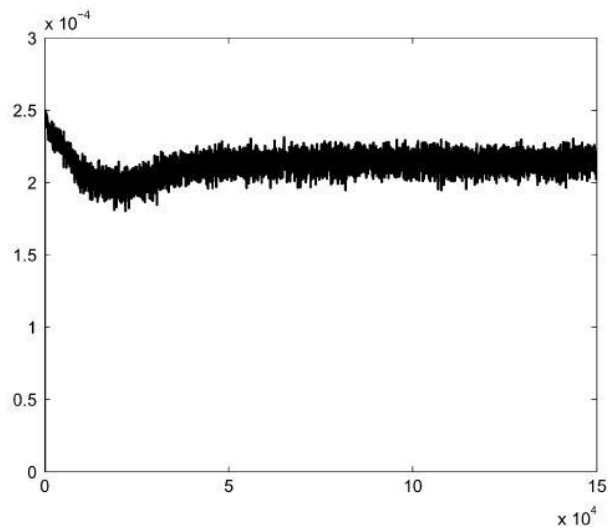
قطب های این سیستم در مکان های  $Z_{1/2} = 0.8 \pm jo.2$  و  $Z_{3/4} = 0.5 \pm jo.5$  قرار دارند. رابطه ورودی خروجی سیستم بدون حافظه غیرخطی، کما فی السابق در نظر گرفته شده است. در این شبیه سازی به جز ورودی که یک سیگنال گاوسی رنگی است که توسط پردازش يك نویز سفید گاوسی توسط فیلتر  $H_k(2) = 1 + 0.5z^{-1}$  بدست آمده است، مابقی شرایط همانند آزمایش قبل در نظر گرفته شده است. به علت دینامیک های بزرگتر در زیر سیستم خطی، برای فیلتر تطبیقی وضعیت همگرایی بسیار مشکل تر خواهد بود. شکل ۲ - ۴ میزان میانگین مربع خطا برای این سیستم را در هر دو الگوریتم نشان می دهد. ضرائب سیستم ناشناخته، مقدار میانگین ضرائب فیلتر تطبیقی و مقدار کوواریانس بعد از همگرایی نیز در جدول ۲ - ۴ نشان داده شده اند [3]. در این آزمایش نیز الگوریتم ارائه شده دارای عملکرد پایدار می باشد. همچنین الگوریتم ارائه شده همگراست، در حالیکه الگوریتم مبتنی بر فیلتر کالمن حتی پس از ۱۵۰۰۰۰ تکرار نیز همگرا نمی شود. مقدار میانگین اندازه قدم نیز در شکل ۳ - ۴ مشخص شده است.



شکل ۲ - ۴ تخمین مربع خطا برای هر دو الگوریتم تطبیقی

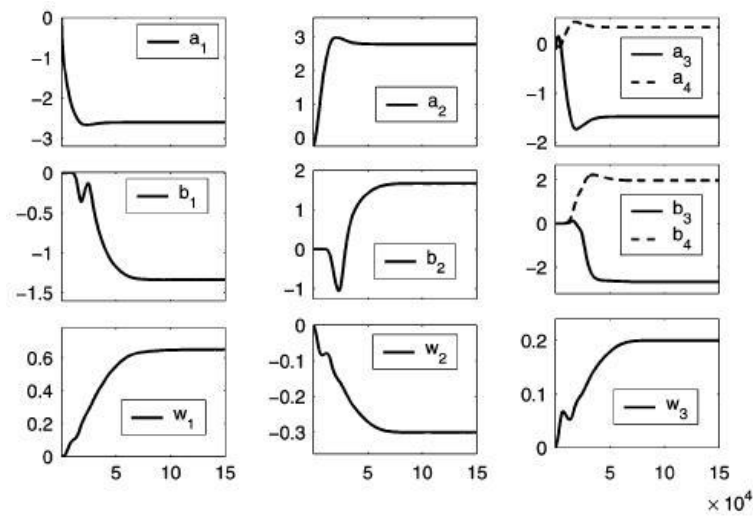
Coefficient	True value	Mean	Variance [ $10^{-4}$ ]
$a_1$	-2.6	-2.6005	0.0716
$a_2$	2.78	2.7810	0.4109
$a_3$	-1.48	-1.4807	0.3301
$a_4$	0.34	0.3402	0.0363
$b_0$	1	-	-
$b_1$	-1.3334	-1.3333	1.7014
$b_2$	1.6667	1.6643	5.9578
$b_3$	-2.6665	-2.6626	5.8153
$b_4$	1.9666	1.9646	2.1292
$p_1$	0.4	0.3994	0.3344
$p_2$	-0.3	-0.2998	0.1632
$p_3$	0.2	0.1999	0.0210

جدول ۲ - ۴ مقایسه عملکرد دو فیلتر تطبیقی



شکل ۳ - ۴ مقدار میانگین اندازه قدم

همچنین تغییرات ضرائب سیستمهای خطی و غیرخطی در شکل زیر آمده است.



شکل ۴ - ۴ تغییرات ضرائب فیلتر

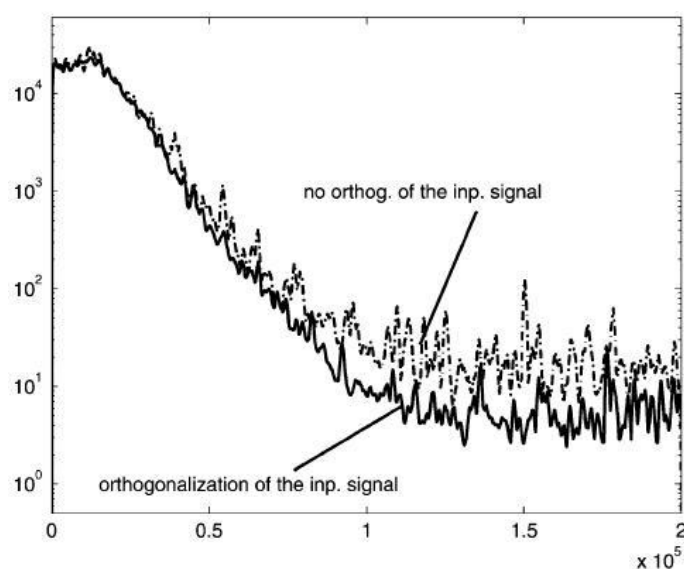
ملاحظه می شود ضرائب  $\hat{a}_i(n)$  و  $\hat{b}_j(n)$  با نرخ تقریباً برابر همگرا می شوند، در حالیکه ضرائب  $\hat{a}_i(n)$  تا حدودی سریعتر همگرا می شوند. این نتایج بیانگر آن هستند که انتخاب اندازه قدم توسط معادله ۵۰ - ۳ منتهی به عملکرد پایدار سیستم IIR فیلتر تطبیقی خواهد شد. از آنجائی که معمولاً تقریب اولیه خطا بزرگ است، مقدار اولیه اندازه قدم ها کوچک هستند.

مسئله متعامدسازی بردار ورودی به زیر سیستم چند جمله ای، زمانی نمود بیشتری پیدا می کند که زیر سیستم چند جمله ای نیاز به مدلی با درجه بالاتر داشته باشد. این مسئله به این دلیل است که گسترش مقادیر ویژه ماتریس خود همبستگی بردار ورودی به زیر سیستم چند جمله ای برای سیستم های با درجه بالاتر، بیشتر می باشد. برای مقایسه یک سیستم تطبیقی در حضور متعامدساز و در عدم حضور آن، فرایندی شامل چند جمله ای

$$z(n) = 1.4x(n) + 0.7x^2(n) + 1.2^3(n) + 0.9x^4(n) + 1.2x^5(n) \quad (4-4)$$

و یک سیستم خطی که تابع تبدیل آن توسط معادله ۲ - ۴ ارائه می شود را در نظر می گیریم. در شکل ۵ - ۴ مقدار میانگین مربع خطای پنجره لغزان برای دو فیلتر با طول پنجره ۵۰ نمونه نشان داده شده است. جهت نمایش بهتر اختلاف، عمل میانگین گیری نیز صورت گرفته است. با مقایسه دو روش مبتنی بر متعامدسازی و عدم متعامدسازی، ملاحظه می شود که سرعت همگرایی قابل مقایسه می-

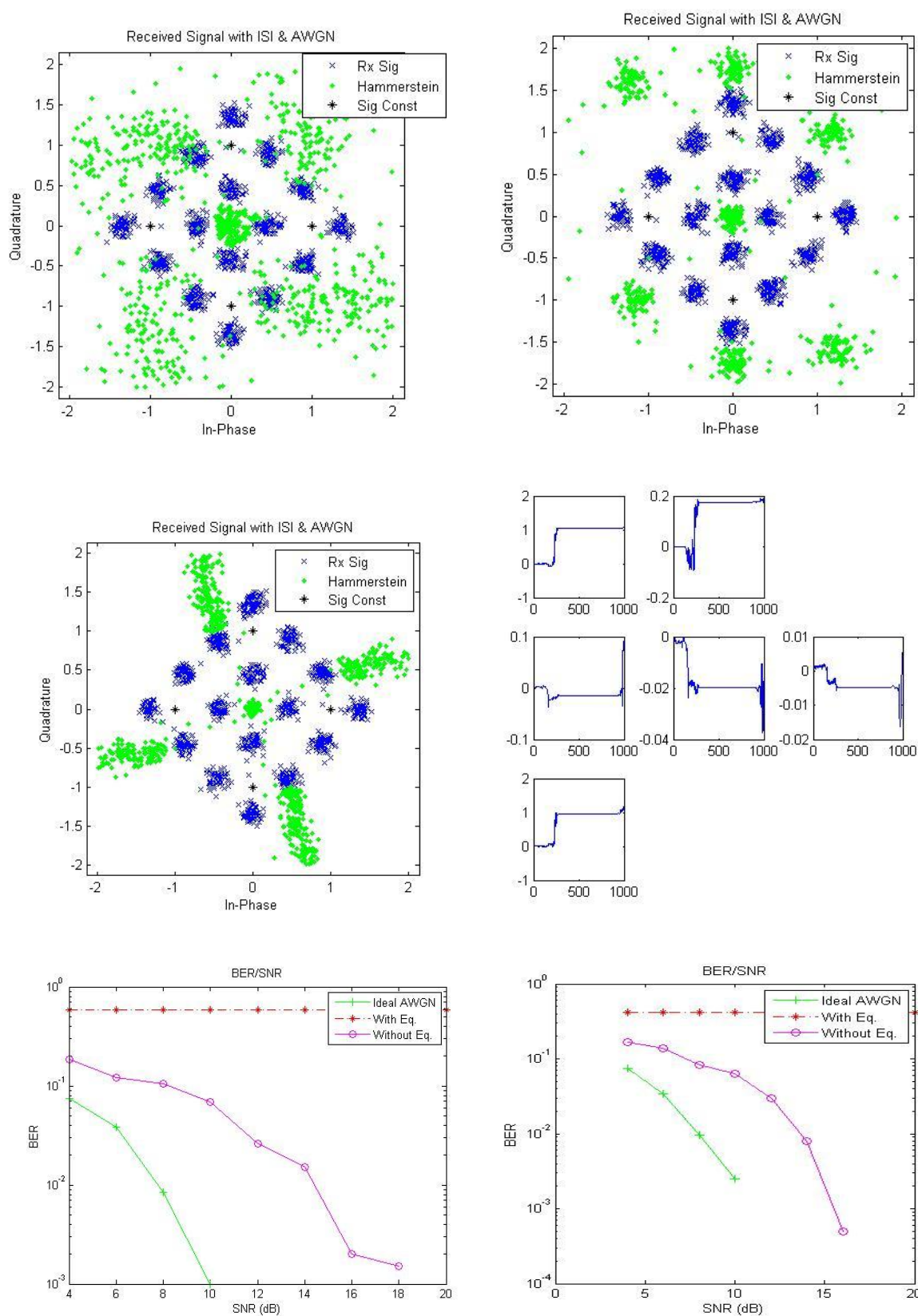
باشد. همچنین روش بدون استفاده از متعامدسازی خطای MSE بیشتری دارد. در عین حال هر دو روش همواره همگرا خواهند بود.



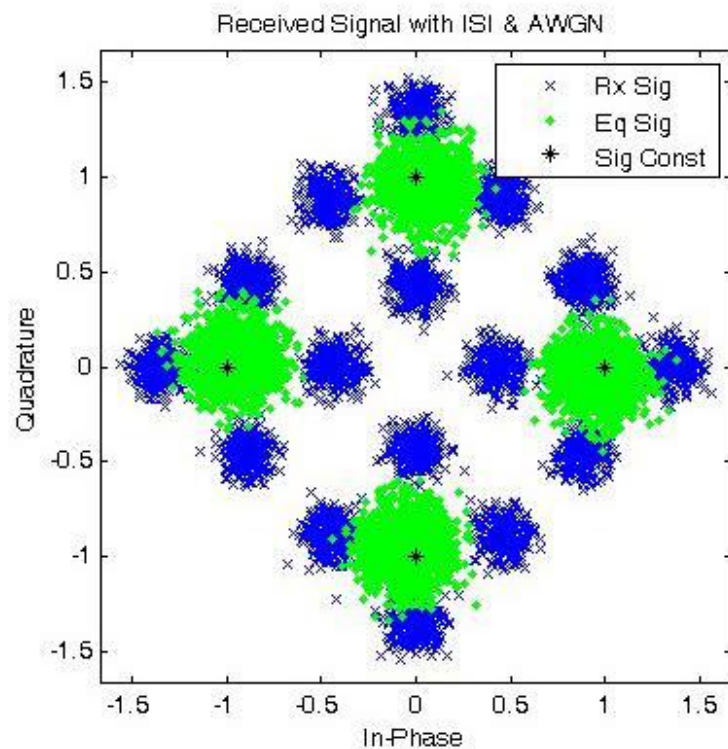
شکل ۵ - ۴ تأثیر متعامدسازی در پیاده سازی الگوریتم

آنچه ارائه شد، خلاصه ای از بخش مهمی از گیرنده یک سیستم مخابراتی، بلوک متعادلسازی، بوده است. پس از بررسی آن و انواع مختلف متعادل ساز، بنا به دلایلی که پیش تر ذکر شد، الگوریتمی برای متعادل سازی تطبیقی کور به نام هم رشتاین فیلترینگ انتخاب شده است. این مدل شامل یک قسمت استاتیک غیرخطی است که توسط بخش خطی دینامیک بازگشتی دنبال می شود. در این سیستم از اعمال دنباله اندازه قدم جهت فعالیت پایدار کل مجموعه بهره گرفته می شود. با استفاده از نتایج شبیه سازی می توان گفت، با توجه به پایداری مناسب و همچنین همگرایی سیستم، جاذبه زیادی برای استفاده از این روش در شناسایی سیستم های غیر خطی وجود خواهد داشت.

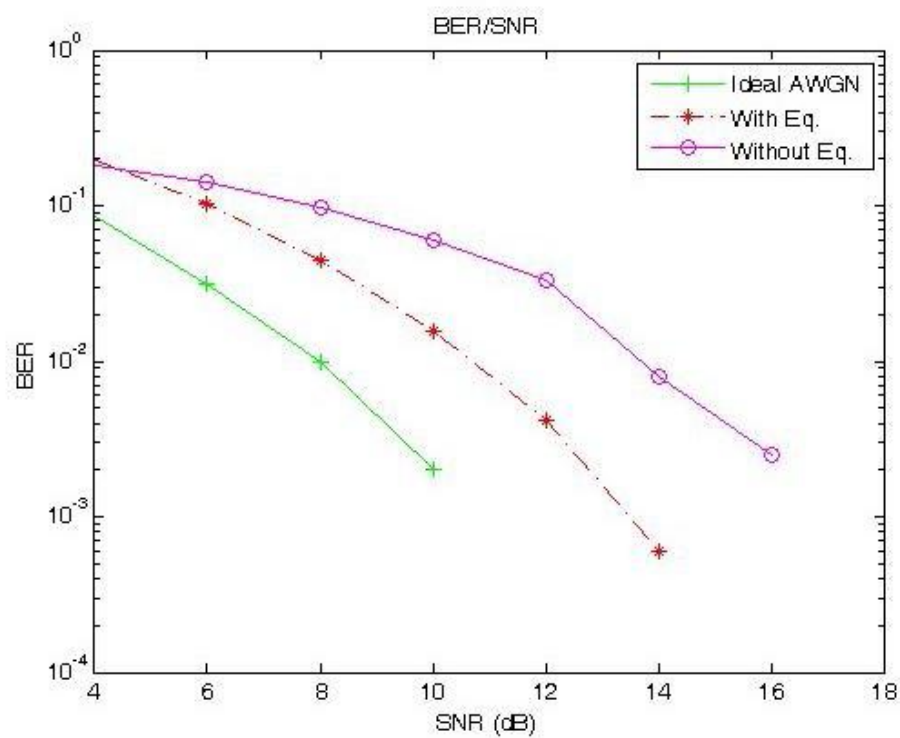
## ضمیمه ۱ : نتایج پیاده سازی الگوریتم توسط برنامه MATLAB



## Signal Constellation



## BER/SNR



- [1] F. Guo and V. R. China, "A New Identification Methode for Wiener and Hammerstein Systems" Doktors Dissertation, Institut fur Angewandte Informatik, Februar 2004.
- [2] O. Gurrapu, "Adaptive Filter Algorithms for Channel Equalization" Masters's Programme in Electrical Engineering-Communication and Signal Processing, Institutionen Ingenjorshogskolan, 1/2009.
- [3] J. Jeraj and V. J. Mathews, "A Stable Adaptive Hammerstein Filter Employing Partial Orthogonalization of the Input Signals" IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 54, NO. 4, April 2006.
- [4] H. Amindavar and B. H. Naeeni, "Performance of Per Tone Hammerstein And Bilinear Recurrent Neural Network Equalizer for Wireless OFDM System" Authorized licensed use limited to: University of Malaya. Downloaded on February 8, 2010 at 22:28 from IEEE Xplore, 1-4244-0779-6/07/\$20.00 ©2007 IEEE.
- [5] A. H. Sayed, "Adaptive Filters" University of California Los Angeles, A John Wiley & Sons, INC., Publication, 2008.
- [6] H. A. Bakhshi and M. Pooyan, "Using Nonlinear Filter for Adaptive Blind Channel Equalization" proceedings of the 5<sup>th</sup> WSEAS International Conference on Telecommunications and Informatics, Istanbul, Turkey, 2006.
- [7] J. G. Proakis and M. Salehi "Digital Communications" Mc Graw Hill Higher Education, 5<sup>th</sup> Edition, 2008.
- [8] A. Goldsmith, "Wireless Communications" Copyright by Cambridge University Press, 2005.
- [9] G. Mzyk, "Nonlinearity Recovering in Hammerstein System from Short Measurement Sequence" IEEE Signal Processing Letters, Vol. 16, No. 9, September 2009.
- [10] Gram-Schmidt Process & Inner product, [http://en.wikipedia.org/wiki/Gram%E2%80%93Schmidt\\_process](http://en.wikipedia.org/wiki/Gram%E2%80%93Schmidt_process).